Эти задачи были собраны в середине 1990-х годов, когда я ездил к И. М. Гельфанду для совместной работы над заданиями заочной математической школы (при Rutgers University). Работа над заданиями по геометрии так и не была тогда закончена, и этот текст представляет собой промежуточную рабочую версию, которую я немного дополнил уже в Москве (и за ошибки в которой И. М. никак не ответствен). [А. Шень (shen@landau.ac.ru, shen@mccme.ru), ноябрь 2004 года]

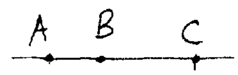
Измерение отрезков

Две геометрические фигуры (отрезки, углы, треугольники и др.) считаются равными, если их можно совместить друг с другом наложением.

Отрезки равны, если равны их длины.

Если точка B лежит на отрезке AC, то $AB + BC = AC$.

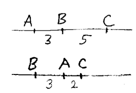
001



1. На прямой выбраны три точки A, B и C, причём $AB = 3$, $BC = 5$. Чему может быть равно AC? (Есть разные возможности.)

▷ Если точка B находится между точками A и C, то это расстояние равно $3 + 5 = 8$. Но возможен и другой случай, когда B находится вне отрезка AC. Нарисовав картинку, убеждаемся, что в этом случае расстояние равно $5 - 3 = 2$. ◁

2

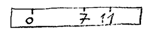


2. На прямой выбраны четыре точки A, B, C, D, причём $AB = 1$, $BC = 2$, $CD = 4$. Чему может быть равно AD? Указать все возможности.

▷ Сначала посмотрим, чему может быть равно расстояние между точками A и C. Как и в предыдущей задаче, тут есть два возможности (точка B внутри AC или вне) — и получается либо 3, либо 1. Теперь мы получаем две задачи: в одной из них $AC = 3$ и $CD = 4$, в другой — $AC = 1$, $CD = 4$. Каждая имеет по два ответа, так что всего ответов получается четыре: $4 + 3$, $4 - 3$, $4 + 1$

и 4 — 1. Ответ: расстояние AD может равняться 1, 3, 5 или 7. ◁

3

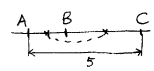


3. На деревянной линейке отмечены три деления: 0, 7 и 11 сантиметров. Как отложить с её помощью отрезок в (а) 8 см; (б) 5 см?

▷ Используя деления 7 и 11, легко отложить 4 сантиметра. Сделав это дважды, получим отрезок в 8 сантиметров. Отложить 5 сантиметров немного сложнее: умея откладывать 8 и 7, можно отложить 1 сантиметр. Сделав это 5 раз, получаем 5 сантиметров.

Этот способ хорош тем, что сразу ясно, как отложить любое целое число сантиметров. Но 5 сантиметров можно отложить и проще: $5 = 3\cdot 11 - 4\cdot 7$, так что достаточно отложить 3 раза по 11 см и потом 4 раза по 7 в другую сторону. ◁

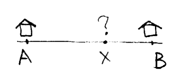
4



4. Точка B лежит на отрезке AC длиной 5. Найти расстояние между серединами отрезков AB и BC.

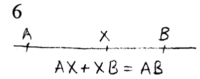
▷ Точку B можно выбирать по-разному. Пусть, например, она делит отрезок AC на части в 1 см и 4 см. Середины этих частей (отрезков AB и BC) отстоят от B на 0,5 см и на 2 сантиметра, всего получается 2,5 см. Попробовав другие варианты расположения точки B, можно убедиться, что во всех случаях расстояние между серединами отрезков AB и BC равно 2,5 см. Почему? Дело в том, что это расстояние составлено из половин отрезков AB и BC. Вместе эти отрезки составляют 5 см, значит, их половины вместе составят 2,5 см. ◁

5



5. В деревне у прямой дороги стоят две избы A, B. на расстоянии 50 метров друг от друга. В какой точке дороги надо построить колодец, чтобы сумма расстояний от колодца до изб была бы наименьшей?

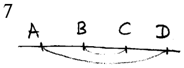
6



▷ Если действовать по справедливости, то надо построить колодец посередине между избами: тогда до каждой будет 25 метров, а в сумме 50. Однако с точки зрения условия задачи любая точка X на участке дороги между A и B одинаково хороша, поскольку в сумме отрезки AX и XB составляют 50 метров. (Например, если построить колодец в 10 метрах от A, то расстояния будут 10 и 40 метров, то есть 50 в сумме.) ◁

6. Та же задача для трёх и четырёх изб, стоящих вдоль дороги с интервалами в 50 метров: где надо строить колодец в этом случае?

▷ Для трёх изб: если среднюю избу не учитывать, то все точки на отрезке между крайними избами были бы одинаково хороши. Значит, наилучшее положение колодца для трёх изб — у средней избы.

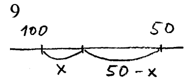
7


Для четырёх изб (обозначим их A, B, C, D): будем отдельно рассматривать две крайние избы (A, D) и отдельно две средние (B, C). В первом случае все точки отрезка AD одинаково хороши: сумма расстояний до A и D будет 150 метров. Во втором наименьшую сумму длин (50 метров) дают точки меньшего отрезка BC. Ответ: наименьшая сумма длин (200 метров) достигается для всех точек из отрезка BC. ◁

8


7. В деревне A живёт 100 школьников, в деревне B живёт 50 школьников. Расстояние между деревнями 3 километра. В какой точке дороги из A в B надо построить школу, чтобы суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, было как можно меньше?

▷ Здесь кажется справедливым построить школу ближе к A, так как там больше школьников. Но насколько ближе? Иногда предлагают построить деревню в километре от A и в двух от B (вдвое больше школьников — вдвое ближе школа). Но с точки зрения поставленной задачи (суммарное расстояние как можно меньше) этот вариант не наилучший — лучше всего построить школу прямо в A.

9


В этом можно убедиться так: если расстояния от школы до A и B равны x и 3−x соответственно, то суммарное расстояние, проходимое всеми школьниками, равно

$$100x + 50(3 - x) = 100x + 150 - 50x = 50x + 150$$

так что оно наименьшее (и равно 150 км), когда $x = 0$.

То же самое можно объяснить и без формул: разделим всех школьников A произвольным образом на две группы по 50 человек. Если бы второй группы не было, то было бы все равно, где строить школу (задача о колодце) — а с точки зрения второй группы лучше всего строить её в A. ◁

Ещё несколько задач

8. На прямой даны точки A, B и C. Известно, что $AB = 5$, а отрезок AC длиннее BC на 1. Найти длины отрезков AC и BC. Может ли точка B лежать вне AC?

9. На прямой даны точки A, B и C. Известно, что $AB = 5$, а отрезок AC длиннее BC в полтора раза. Найти длины отрезков AC и BC. (Укажите все возможности.)

10. Точка B делит отрезок AC в отношении $2:1$. Точка D делит отрезок AB в отношении $3:2$. В каком отношении делит точка D отрезок AB?

11. Точки C, D и E делят отрезок AB в отношении $1:2$, $1:3$ и $1:4$ соответственно. В каком отношении точка D делит отрезок CE?

Измерение углов

Углы равны, если равны их величины.

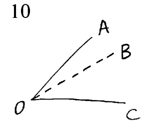
Если луч OB делит угол AOC на две части, то $\angle AOC = \angle AOB + \angle BOC$.

Развёрнутый угол (угол между двумя половинами одной прямой) считается равным 180 градусам (180°). Другими словами, градус — это $1/180$ часть развёрнутого угла.

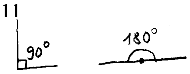
Прямой угол — половина развёрнутого, т.е. 90°.

Углы, меньшие прямого, называют *острыми*, большие прямого — *тупыми*.

10

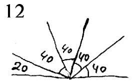


11



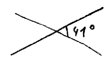
12. Имеется деревянный угольник с углом в 40°. Как построить с его помощью угол в (а) 80°; (б) 160°; (в) 20°?

12



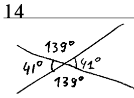
▷ Построить угол в 80° просто — надо отложить дважды угол по 40°. Дальше получатся углы в 120° и в 160° (который нам нужен). Заметим теперь, что 20° — это дополнение 160° до развёрнутого угла, так что если мы продолжим одну из сторон угла в 160° за его вершину, то получим искомый угол в 20°. ◁

13



13. Один из четырёх углов, образующихся при пересечении двух прямых, равен 41°. Чему равны три остальных угла?

14



▷ Соседние углы дополняют угол в 41° до развёрнутого, который составляет 180°, поэтому они содержат $180°-41° = 139°$. В свою очередь, чтобы дополнить угол в 139° до развёрнутого, нужен угол в $180° - 139° = 41°$. Таким образом, два угла из трёх равны 139°, а один — 41°. ◁

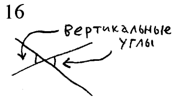
14. В Париже в течение долгого времени хранился эталон метра (пока метр не стали определять через длину световых волн), однако эталона градуса там никогда не было. Как вы думаете, почему?

▷ Специального эталона не нужно: любая прямая может считаться эталоном развёрнутого угла. ◁

15

При пересечении двух прямых образуются четыре угла. Если два из них имеют общую сторону, их называют *смежными*, если не имеют — *вертикальными*.

16



15. Смежные углы в сумме составляют развёрнутый угол (180°). Вывести отсюда, что вертикальные углы равны.

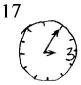
▷ Рассуждаем как в предыдущей задаче — каждый из двух вертикальных углов дополняет смежный с ними угол до развёрнутого, значит, они равны. ◁

16. На сколько градусов поворачивается за минуту минутная стрелка? Часовая стрелка?

▷ За час минутная стрелка делает целый оборот, за полчаса она поворачивается на 180° (развёрнутый угол). Полчаса — это 30 минут, значит, за минуту она поворачивается на 1/30 часть угла в 180°, то есть на $180/30 = 6°$.

Часовая стрелка за час делает 1/12 часть круга, то есть движется в 12 раз медленнее минутной. За минуту она поворачивается на 0,5°. ◁

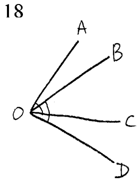
17



17. Какой угол образуют минутная и часовая стрелки ровно в 3 часа 05 минут?

▷ За пять минут, прошедших после 3 часов, минутная стрелка повернётся на 30°. Но для правильного ответа надо учесть, что повернётся и часовая стрелка. Насколько? За час она поворачивается на одно часовое деление циферблата, то есть на те же 30°. Значит, за 5 минут она повернётся на 1/12 долю от 30°, то есть на 2,5°. Теперь легко получить ответ: из начального угла в 90° надо вычесть 30° и прибавить2,5°, получится 62,5°. ◁

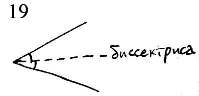
18



18. Из точки O выходят лучи OA, OB, OC, OD (рисунок). Известно, что $\angle AOC = \angle BOD$. Доказать, что $\angle AOB = \angle COD$.

▷ Если из равных величин вычесть одно и то же — останутся равные. Здесь так и происходит: из равных углов AOC и BOD мы вычитаем их пересечение — угол BOC. Остаются как раз углы AOB и COD. ◁

19



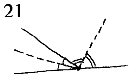
Луч, делящий угол пополам, называется его *биссектрисой*.

Два луча, образующие прямой угол, называют *перпендикулярными*.

19. Доказать, что биссектрисы двух смежных углов перпендикулярны. Доказать, что биссектрисы двух вертикальных углов лежат на одной прямой.

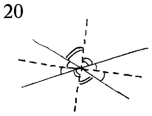
▷ Рассмотрим два смежных угла, каждый из которых разделён биссектрисой на две равные части. Таким образом, развёрнутый угол разделён на четыре части — две равные половины одного угла и две равные половины другого. Если из этих четырёх частей оставить только две (по одной из каждой пары равных), то они составят половину развёрнутого угла, то есть прямой угол. Первая часть задачи решена.

21

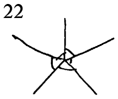


Пусть теперь даны две прямые, в пересечении которых получается четыре угла. Нам надо доказать, что биссектрисы противоположных (вертикальных) углов лежат на одной прямой, то есть продолжают друг друга. Проведём биссектрисы всех четырёх углов. Мы уже виде, что соседние из них образуют прямой угол. Два прямых угла в сумме дают развёрнутый, так что противоположные биссектрисы действительно лежат на одной прямой. ◁

20



22



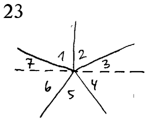
20. Пять лучей, выходящих из одной точки, разрезают плоскость на пять равных углов. Найти величину этих углов.

▷ В сумме эти пять углов составляют полный круг, то есть два развёрнутых угла, то есть $2 \times 180^\circ = 360^\circ$. Каждый из них составляет одну пятую от 360°, то есть $360/5 = 72^\circ$. ◁

Предыдущая задача и её решение требует некоторых комментариев. Дело в том, что разные учебники по-разному трактуют понятие угла. Можно считать, что угол — это геометрическая фигура, составленная из двух лучей. А можно считать, что угол — это не сами лучи, а часть плоскости, между ними содержащаяся. При таком понимании два луча с общей вершиной определяют два угла: один меньше развёрнутого, а другой больше. При первом подходе максимально возможная величина угла — это 180° (развёрнутый угол), при втором — 360° (полный круг, который можно условно считать дополнением к углу в 0°.

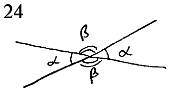
Какое отношение это имеет к предыдущей задаче? Вот какое: если мы разрешаем углы больше 180°, то всё просто — угол в 360° разрезан на 5 равных частей, сумма которых равна 360° и т.д. Если же мы не хотим говорить об углах, больших 180°, то это рассуждение не годится и надо действовать чуть сложнее. Проведём какую-нибудь прямую через

23



заданную точку, которая разделит два из пяти углов на части. Всего получится 7 частей. В сумме эти части дают столько же, сколько наши пять углов (каждый разрезанный угол равен сумме двух его частей). С другой стороны, эти части складываются в два развёрнутых угла, поэтому в сумме дают $2 \times 180^\circ$.

24



21. Из точки выходят четыре луча, делящие плоскость на четыре угла. При этом оказалось, что (считая против часовой стрелки) первый угол равен третьему, а второй — четвёртому. Доказать, что лучи составляют две прямые (продолжая друг друга).

$\triangleright$ Обозначим первый и третий углы (они равны) через α, а второй и четвёртый — через β. Тогда $\alpha+\beta+\alpha+\beta = 360^\circ$, то есть $2\alpha + 2\beta = 360^\circ$, поэтому $2(\alpha + \beta) = 360$, и $\alpha + \beta = 180^\circ$. А рядом находящиеся углы, в сумме дающие 180°, составляют развёрнутый угол. $\triangleleft$

Ещё несколько задач

22. Имеется деревянный угольник с углом в 19°. Как построить с его помощью угол в 1°?

$\langle$ Что будет, если откладывать угол в 19°, пока не получится полный круг? $\rangle$

23. Прямой угол разделен двумя лучами на три угла. Один из них на 10° больше другого и на 10° меньше третьего. Найти величины углов. [30°, 20°, 40°]

24. Прямой угол разделен двумя лучами на три угла. Один из них в два раза меньше другого и в три раза меньше третьего. Найти величины углов. [15°, 30°, 45°]

25. В полдень минутся и часовая стрелки совпали. Когда они совпадут в следующий раз? [через 12/11 часа]

26. Сколько раз в течение суток часовая и минутная стрелки совпадают? Образуют развёрнутый угол? Образуют прямой угол?

27. Через точку на плоскости провели 10 прямых, после чего плоскость разрезали по этим прямым на углы. Доказать, что хотя бы один из этих углов меньше 20°. [Всего 20 лучей, 20 углов по 20° дают 400° > 360°]

28. Из одной точки выходят четыре луча OA, OB, OC, OD, которые делят плоскость на четыре угла, три из которых таковы: $\angle AOB = 45°$, $\angle BOC = 90°$, $\angle COD = 105°$, Найти четвёртый угол AOD. Найти углы AOC и BOD. [120°, 135°, 165° (или 195°, если считать угол, больший развёрнутого]

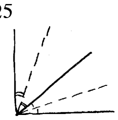
29. Из одной точки проведены три луча OA, OB и OC. Известно, что $\angle AOB = 10°$, $\angle BOC = 20°$, $\angle COD = 40°$. Чему может быть равен угол AOD? Указать все возможности. [10°, 30°, 50°, 70°]

30. Угол AOB равен 100°. Луч OC проведён так, что угол AOC на 10° больше угла BOC. Чему равны углы AOC и BOC? (Укажите все возможности.) [55°, 45°; другой вариант — 85°, 75°]

31. Угол AOB равен 100°. Луч OC проведён так, что угол AOC в полтора раза больше угла BOC. Чему равны углы AOC и BOC? (Укажите все возможности.) [60°, 40°; другой вариант — 156°, 104°]

32. Из точки на листе бумаги провели четыре луча, делящих плоскость на четыре угла. Затем лист разрезали по биссектрисам этих углов на четыре части (которые тоже являются углами). Доказать, что два из этих углов образуют в сумме 180°, и два остальных — тоже.

25

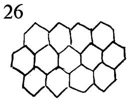


33. Прямой угол разделён на два. Найти угол между биссектрисами получившихся углов.

34. Из бумаги вырезано много одинаковых углов, величина которых составляет целое число градусов. Известно, что 21 такой угол можно приложить друг к другу, и они ещё не заполнят всей плоскости, а 22 уже не поместятся. Найти величину углов. [$360/21 > x > 360/22$; $x = 17$]

35. Можно ли нарисовать треугольник и точку внутри него, из которой любая сторона видна под прямым углом? [нет: $3 \times 90 = 270 < 360$]

26

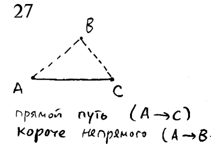


36. Пчелиные соты состоят из примыкающих друг к другу одинаковых шестиугольников, в которых все углы равны. Чему равны эти углы?

37. Из точки O на плоскости выходят четыре луча OA, OB, OC и OD (перечислены против часовой стрелки). Известно, что сумма углов AOB и COD равна 180°. Доказать, что биссектрисы углов AOC и BOD перпендикулярны.

Неравенство треугольника

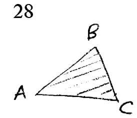
27



> Если точка B не лежит на отрезке AC, то расстояние AC меньше суммы расстояний AB и BC.

38. Доказать, что в треугольнике любая сторона меньше суммы двух других сторон. (Треугольник — фигура из трёх точек, не лежащих на одной прямой, соединённых отрезками. Точки эти называются *вершинами*, а отрезки — *сторонами* треугольника.)

28



▷ На самом деле эта задача всего-навсего повторяет приведённое выше утверждение: если A, B и C — вершины треугольника, AC — одна из его сторон, а AB и BC — две другие стороны, то как раз и надо доказать, что $AC < AB + BC$. (Точка B не лежит на отрезке AC, так как точки A, B и C не лежат на одной прямой.)

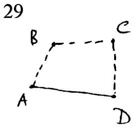
Поэтому приведённое выше неравенство ($AC < AB + BC$) так и называют — *неравенство треугольника*. ◁

Неравенство треугольника можно сформулировать и так: $AB + BC \geq AC$, причём равенство достигается в том и только в том случае, когда точка B лежит на отрезке AC.

39. Расстояние AB равно 5, а расстояние BC равно 3. Может ли расстояние AC быть равно 9? Может ли расстояние AC быть равно 1?

▷ На оба вопроса ответ отрицательный. В первом случае это невозможно, так как AC не может быть больше $AB + BC = 5 + 3 = 8$. Во втором случае дело немного сложнее, и надо применить неравенство треугольника к тем же точкам в другом порядке. Если $AC = 1$, то получится, что $AC + CB = 3 + 1 = 4$; между тем $AB = 5$. Получается, что $AB > AC+CB$, чего не может быть (неравенство треугольника, только точки переименованы). ◁

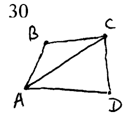
29



40. На плоскости даны четыре точки A, B, C и D. Доказать, что

$$AD \leq AB + BC + CD$$

30



▷ Это неравенство можно было бы называть *неравенством четырёхугольника* и прочесть так: сторона четырёхугольника не меньше суммы трёх других его сторон. Оно является следствием неравенства треугольника, и чтобы увидеть это, достаточно провести в четырёхугольнике диагональ. В самом деле, если в сумме $AB + BC + CD$ заменить два первых слагаемых на AC, то по неравенству треугольника сумма уменьшится (или останется той же, если точка B лежит на отрезке AC). Остаётся второй раз применить неравенство треугольника и заметить, что $AC + CD \geq AD$.

Повторим наше рассуждение более формально. По неравенству треугольника, $AB + BC \geq AC$. Прибавляя к обеим частям CD, видим, что $AB + BC + CD \geq AC + CD$. С другой стороны, по неравенству треугольника $AC + CD \geq AD$. ◁

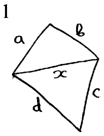
41. Доказать, что в треугольнике любая сторона меньше половины периметра (суммы сторон).

▷ Здесь удобно обозначить стороны треугольника буквами a, b и c. Тогда полупериметр будет $(a + b + c)/2$ и нам надо доказать, что сторона треугольника (пусть a) его не превосходит, то есть что

$$a \leq \frac{a + b + c}{2}$$

Удобнее умножить обе части неравенства на 2 и доказывать, что $2a \le a + b + c$. А это понятно, поскольку $a \le b + c$ по неравенству треугольника и остаётся добавить a к обеим частям. ◁

31



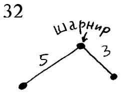
42. Доказать, что в четырёхугольнике любая диагональ меньше половины периметра.

▷ Пусть диагональ четырёхугольника со сторонами a, b, c, d равна x (см. рисунок). Она разбивает его на два треугольника. Запишем два неравенства для этих треугольников:

$$x < a + b; \qquad x < c + d$$

Если их сложить, получится, что $2x < a + b + c + d$. Поделив обе части пополам, видим, что $x < (a+b+c+d)/2$, что и требовалось доказать. ◁

32

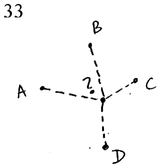


43. Двухзвенный шарнир состоит из звеньев длиной 5 и 3 см, концы которых соединены так, что могут вращаться друг относительно друга (см. рисунок). Какое расстояние (минимальное и максимальное) может быть между другими концами?

▷ Вопрос можно сформулировать так: в каких пределах может меняться расстояние AC, если $AB = 5$, $BC = 3$? Неравенство треугольника говорит, что AC не может быть больше $AB + BC = 5 + 3 = 8$ см. Это значение достигается, если точки A, B, C лежат на одной прямой (в указанном порядке). Итак, максимальное значение AC есть 8. С другой стороны, расстояние AC не может быть меньше 2, так как в этом случае $AC + CB$ было бы меньше $2 + 3 = 5$, что противоречит неравенству $AC + CB \ge AB$. Минимальное значение $AC = 2$ достигается, когда C лежит на отрезке AB.

Наглядно это можно пояснить так: если тянуть за концы шарнира, стараясь максимально развести их друг от друга, то он полностью раскроется, отрезки AB и BC будут продолжать друг друга и расстояние AC будет равно 8. Напротив, если мы пытаемся приблизить C к A насколько возможно, то C будет на отрезке AB и AC будет равно 2. ◁

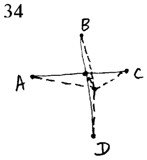
33



44. Четыре дома A, B, C и D расположены в вершинах четырёхугольника (см. рисунок). Где нужно вырыть колодец, чтобы сумма расстояний от него до четырёх домов была наименьшей?

▷ Если заботиться только о жителях домов A и C, забыв об интересах жителей B и D, то оптимальными будут точки X на отрезке AC (и с точки зрения суммы AX+XC они все одинаково хороши). Аналогичным образом, с точки зрения суммы BX+XD оптимальными являются точки отрезка BD. Тем самым точка пересечения AC и BD является оптимальной с обоих точек зрения: для неё обе суммы $AX+XC$ и $BX+XD$ принимают минимально возможные значения, и, следовательно, общая сумма $AX+BX+CX+DX$ также минимальна. ◁

34



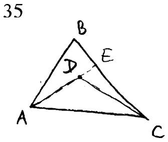
Ещё несколько задач

45. Может ли в треугольнике сторона быть вдвое больше другой стороны и вдвое меньше третьей? [$x/2 + x < 2x$, нет]

46. Трёхзвенный шарнир состоит из звеньев длиной 2, 5 и 8 см. Какое расстояние (минимальное и максимальное) может быть между его концами? [1, 15]

47. Внутри треугольника ABC взята точка D. Доказать, что $AD + DC \leq AB + BC$.

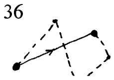
35



⟨ В качестве промежуточной величины для сравнения можно взять $AE + EC$, где точка E получается, если продолжить отрезок AD за точку D до пересечения со стороной BC. ⟩

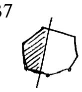
48. Доказать, что длина ломаной линии (непрерывной линии, составленой из нескольких отрезков) не меньше расстояния между её концами. (Таким образом, прямой путь всегда лучше непрямого.)

36



49. Выпуклый многоугольник разрезали по прямой на две части. Доказать, что периметр каждой из частей меньше периметра исходного многоугольника.

37

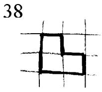


50. Утверждение задачи 47 является простым следствием задачи 49. Почему?

Равные фигуры

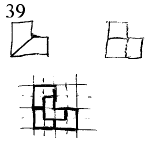
> Две геометрические фигуры (треугольники, четырёхугольники и др.) считаются *равными*, если они имеют одинаковую форму и размер, то есть если они могут быть совмещены друг с другом наложением. При этом фигуру разрешается переворачивать, так что, например, буквы R и Я считаются равными.

38



51. Уголок, составленный из 3 квадратов, можно разрезать на 2, 3 и на 4 равные части. Как это сделать?

39



▷ На две равные части разрезать легко: достаточно соединить углы (см. рисунок). Ещё проще разрезать на три равные части — на три квадратика.

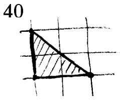
Сложнее разрезать уголок на 4 равные части, но и это возможно: получится четыре уголка поменьше (см. рисунок). ◁

> Две фигуры, равные третьей, равны между собой.

52. Как с помощью этого свойства проверить равенство фигур на двух рисунках в книжке (не вырезая фигур из книжки)?

▷ Срисовать рисунок на прозрачную плёнку (кальку) и сравнить. ◁

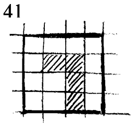
40



53. Разрезать треугольник на рисунке на 4 равных треугольника.

▷ Достаточно соединить между собой середины его сторон. ◁

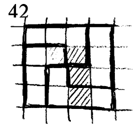
41



54. Разрезать квадрат на рисунке на четыре равные части так, чтобы каждая из них содержала по одному заштрихованному квадратику.

▷ См. рисунок. ◁

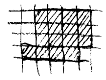
42



Ещё несколько задач

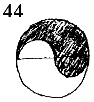
55. Разрезать фигуру на рисунке на две равные части

43



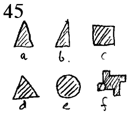
56. Как разрезать фигуру на рисунке (символ инь-янь) на 7 равных частей? (Если вы догадались, как это сделать, то легко разрежете её на любое число равных частей.)

44



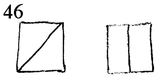
57. Некоторые фигуры можно наложить на себя несколькими способами (например, треугольник на рис. (a) можно повернуть вокруг вертикальной оси) некоторые — только одним (b). Сколькими способами можно наложить на себя фигуры рисунков (c), (d), (e), (f)?

45



58. Квадрат на рисунке можно разрезать на две равные части многими способами. Два их них показаны (по диагонали и по линии, соединяющей середины противоположных сторон). Придумать еще несколько, в том числе с кривой линией разреза.

46

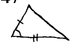


Признаки равенства треугольников

В равных треугольниках равны (соответственные) стороны и углы.

Чтобы убедиться в равенстве двух треугольников, не надо сверять *все* стороны и углы — можно воспользоваться одним из *признаков равенства треугольников*.

47



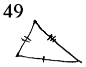
Первый признак: по двум сторонам и углу между ними. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$

равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$.

48

Второй признак: по стороне и примыкающим к ней двум углам. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$.

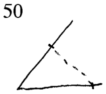
49



Третий признак: по трём сторонам. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ равны, если $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$.

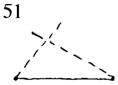
Наглядное объяснение, почему эти признаки верны, совсем просто для первого и второго признаков и немного сложнее для третьего.

50



Первый признак. По предположению углы A и A_1 равны. Совместим их друг с другом так, чтобы отрезок AB пошёл вдоль A_1B_1, а AC — вдоль A_1C_1. Поскольку $AB = A_1B_1$, то точки B и B_1 при таком наложении совпадут. Аналогично точки C и C_1 тоже совпадут. Значит, все три вершины треугольников совместятся.

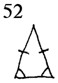
51



Второй признак. Наложим сторону AB на равную ей сторону A_1B_1, причём так, чтобы точка A наложилась на A_1, точка B наложилась на B_1, а точки C и C_1 оказались по одну сторону от AB. Тогда в силу равенства углов A и A_1 прямая AB наложится на A_1B_1. По аналогичным причинам прямая CB наложится на C_1B_1. Значит, точка B, в которой пересекаются прямые AB и CB, наложится на точку B_1, и треугольники совместятся.

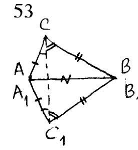
Для третьего признака нам понадобится вспомогательное замечание: если в треугольнике две стороны равны, то и противолежащие им углы равны. В самом деле, пусть в треугольнике ABC стороны AB и AC равны. Тогда перевернем его так, чтобы точка A наложилась на себя, но сторона AB пошла по AC и наоборот. Поскольку $AB = AC$, то точка B наложится на точку C и наоборот. Значит, угол B совместится с углом C, то есть они равны.

52



Теперь уже можно перейти к третьему признаку равенства треугольников. Приложим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ друг к другу сторонами AB и A_1B_1 так, чтобы C и C_1 оказались по разные стороны. Треугольники ACC_1 и BCC_1 равнобедренные, поэтому одинаково обозначенные на рисунке углы равны. Сложив их, получим, что углы C и C_1 равны, остаётся воспользоваться первым признаком.

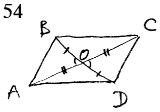
53



Эти объяснения не являются «строгим доказательством», как говорят математики, но тем не менее довольно убедительны.

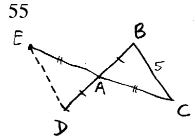
59. В четырёхугольнике точка пересечения диагоналей делит каждую их них пополам. Доказать, что противоположные стороны четырехугольника равны.

54



▷ Пусть $ABCD$ — данный четырёхугольник, O — точка пересечения его диагоналей. Отметим на рисунке пары равных по условию отрезков — одну пару одинарной чёрточкой, другую — двойной. Кроме того, отметим вертикальные (и, следовательно, равные) углы AOB и COD. Теперь есть все условия для применения первого признака равенства к треугольникам AOB и COD (две стороны и угол между ними), и из равенства этих треугольников заключаем, что $AB = CD$. Рассмотрев два других треугольника (какие?), аналогичным образом убеждаемся, что $BC = AD$. ◁

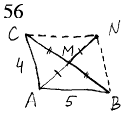
55



60. На продолжении стороны AB треугольника ABC за точку A взята точка D, причём $AD = AB$. На продолжении стороны AC треугольника ABC за точку A взята точка E, причём $AE = AC$. Найти расстояние между точками D и E, если $BC = 5$.

▷ Эта задача решается почти так же, как предыдущая. По условию в треугольниках ABC и EAD (в котором надо провести ещё сторону ED) равны по две стороны: $AB = AD$, $AC = AE$. Углы BAC и EAD являются вертикальными, и потому тоже равны. По первому признаку равны и треугольники, так что $ED = BC = 5$. ◁

56



61. В треугольнике ABC медиана AM (отрезок, соединяющий вершину A с серединой M стороны BC), продолжена за точку M на расстояние, равное AM. Найти расстояние от полученной точки до точек B и C, если стороны AB и AC равны соответственно 5 и 4.

▷ Пусть N — конец продолженной медианы, так что N лежит на продолжении AM за точку M и $AM =$

MN. Тогда в четырёхугольнике ABNC диагонали делятся точкой пересечения пополам, так что можно сослаться за уже решённую задачу и увидеть, что противоположные стороны четырёхугольника равны, то есть $NB = AC = 5$, $NC = AB = 4$. ◁

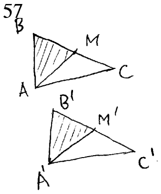
62. Доказать, что в произвольном треугольнике ABC медиана AM не превосходит полусуммы сторон AB и AC

▷ Нам пригодится предыдущая задача: надо доказать, что удвоенная медиана не превосходит суммы $AB + AC$; в предыдущей задаче как раз была построена удвоенная медиана AN, которая была стороной треугольника ABN, две другие стороны которого AB и $BN = AC$. Остаётся сослаться на неравенство треугольника. ◁

63. Пользуясь первым признаком равенства треугольников, доказать, что в двух равных треугольниках медианы, проведенные к соответственным сторонам, равны.

▷ Пусть ABC и $A'B'C'$ — эти треугольники (равные стороны и углы обозначены одинаковыми буквами), AM и $A'M'$ — проведённые в них медианы (так что M — середина BC, а M' — середина $B'C'$). Посмотрим на треугольники ABM и $A'B'M'$. В них равны углы B и B', стороны AB и $A'B'$, а также стороны BM и $B'M'$ (как половины равных сторон BC и $B'C'$). Поэтому они равны по первому признаку, и соответственные стороны (в том числе те, которые являются медианами) равны.

57

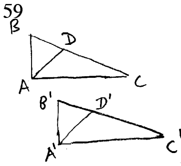


Заметим, что мы с тем же успехом могли бы использовать треугольники AMC и $A'M'C'$. ◁

64. Пользуясь вторым признаком равенства треугольников, доказать, что в двух равных треугольниках бисектрисы, делящие соответственные углы пополам, равны.

▷ (В задаче идёт речь, конечно, об отрезках биссектрис до противоположной стороны.) Пусть AD и $A'D'$ — такие отрезки. Следуя решению предыдущей задачи, рассмотрим треугольники ABD и $A'B'D'$ — в них равны стороны AB и $A'B'$, а также углы B и B'. Кроме

59

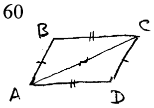


того, угол DAB равен углу $D'A'B'$, так как они составляют половины равных углов CAB и $C'A'B'$. Остаётся воспользоваться вторым признаком равенства треугольников. ◁

65. В четырёхугольнике противоположные стороны попарно равны. Доказать, что противоположные углы в нём равны. (Такие четырёхугольники называются параллелограммами и мы к ним ещё вернёмся).

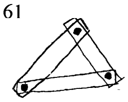
▷ Пусть $ABCD$ — такой четырёугольник. Проведём в нём диагональ, например, AC. Она разобьёт его на два треугольника ABC и ADC, к которым можно применить третий признак равенства треугольников — сторона AC у них общая, а две другие пары сторон равны по условию. Значит, равны и все углы, в частности, и углы B и D.

60



Аналогичное рассуждение (какие в нём будут треугольники?) показывает, что углы A и C равны. ◁

61



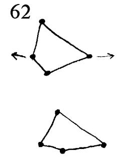
66. Три балки соединены болтами по концах (см. рисунок). Полученная конструкция будет жёсткой, хотя вокруг болтов балки могут проворачиваться. Какой признак равенства треугольников является тому причиной?

▷ Балки являются сторонами треугольниками, а болты — его углами. Возможность вращения в точках крепления означает, что углы треугольника не фиксированы. Зато длины сторон — расстояния между отверстиями в балках — меняться не могут, и третий признак равенства треугольников гарантирует, что углы тоже меняться не могут. ◁

67. Верно ли такое утверждение: если в двух четырёхугольниках $ABCD$ и $A'B'C'D'$ соответствующие стороны равны ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$ и т.д.), то четырёхугольники равны?

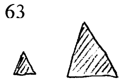
▷ Вспоминая предыдущую задачу, можно сформулировать вопрос так: будет ли жёстким шарнирный четырёхугольник? Сразу же ясно, что нет — взявшись руками за противоположные вершины, можно сдвигать их и

62



раздвигать. На рисунке показаны два положения шарниров — два различных четырёхугольника с соответственно равными сторонами. ◁

63

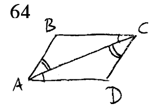


Все три признака равенства треугольников имеют один и тот же общий вид: треугольник определяется некоторым тремя элементами однозначно. (В первом признаке это две стороны и угол между ними, во втором — сторона и два прилегающих угла, в третьем — три стороны.) Не следует думать, однако, что эти три элемента могут быть любыми. Например, мы увидим дальше, три угла не определяют треугольник однозначно — бывают треугольники одинаковой формы, но разного размера (см. рисунок). Такие треугольники называют подобными, и мы к ним ещё вернёмся.

Ещё несколько задач

68. Диагональ делит выпуклый четырёхугольник на два равных треугольника. Доказать, что другая диагональ делит четырёхугольник либо на два равных треугольника, либо на два равнобедренных треугольника.

64



69. В четырёхугольнике $ABCD$ проведена диагональ AC. Оказалось, что «накрест лежащие» углы при этой диагонали равны: $\angle BAC = \angle ACD$, $\angle CAD = \angle ACB$. Доказать, что противоположные стороны четырёхугольника равны.

Равнобедренные треугольники

65

Треугольник называют *равнобедренным*, если две его стороны равны. Эти равные стороны называют *боковыми сторонами* треугольника, а третью сторону — его *основанием*.

В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

Если в треугольнике углы при основании равны, то он равнобедренный.

Эти два утверждения можно сформулировать так: углы, противолежащие равным сторонам треугольника, равны; стороны, противолежащие равным углам треугольника, равны.

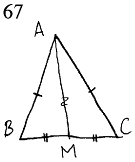
Их можно рассматривать как частные случаи двух первых признаков равенства треугольников и объяснить тем же способом.

Для первого: если треугольник ABC равнобедренный и (скажем) AB = AC, то перевернём его и наложим на себя так, чтобы точка A осталась на месте, а сторона AB пошла по AC — тогда AC пойдёт по AB. Поскольку AB = AC, то точки B и C наложатся друг на друга. (Это рассуждение мы уже приводили, говоря о третьем признаке равенства треугольников.)

Для второго: перевернём треугольник и наложим BC на себя так, чтобы B наложилось на C и наоборот. Мы предполагаем, что углы при основании равны, поэтому боковые стороны наложатся на себя, и точка их пересечения, то есть вершина A, останется на месте.

70. В равнобедренном треугольнике проведена медиана, соединяющая середину основания с противоположной вершиной. Доказать, что эта медиана является высотой (перпендикулярна основанию) и биссектрисой.

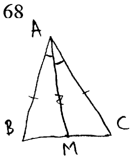
67



▷ Обозначим наш треугольник через ABC (основание BC, боковые стороны AB и AC). Медиана AM соединяет вершину A с серединой основания BC. Она делит треугольник на две половины ABM и ACM. Легко видеть, что эти половины равны по третьему признаку (одна сторона общая, две другие равны, потому что треугольник равнобедренный, оставшаяся пара — потому что медиана делит основание пополам). Значит, углы при вершине A равны (медиана является биссектрисой); углы при вершине M тоже равны и вместо составляют 180°, значит, каждый из них равен 90°. Следовательно, медиана является высотой. ◁

71. Доказать, что в равнобедренном треугольнике ABC (где AB = AC) биссектриса угла при вершине (A) является высотой, т.е. перпендикулярна стороне BC, и медианой, т.е. делит сторону BC пополам.

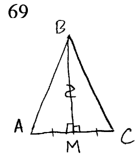
▷ Обозначим эту биссектрису через AM. Треугольники AMB и AMC имеют равные углы при вершине A и две пары равных сторон около этих углов (одна сторона общая, две другие равны, так как треугольник равнобедренный). Значит, по второму признаку они равны. В частности, равны стороны MB и MC, то есть биссектриса является медианой. Кроме того, равны углы при вершине M, которые в сумме равны 180°, значит, каждый из них равен 90°, так что биссектриса является высотой. ◁

68


Впрочем, если приглядеться, то эта задача в точности совпадает с предыдущей. Там мы должны были доказать, что в равнобедренном треугольнике медиана является биссектрисой, а сейчас — что биссектриса является медианой. То есть в обоих случаях надо было доказать, что биссектриса и медиана совпадают, только сформулировано это было по-разному. (И ещё надо было доказать, что эти совпадающие биссектриса и медиана перпендикулярны основанию.)

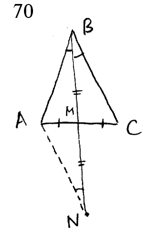
72. В треугольнике ABC медиана BM, соединяющая точку B с серединой M стороны AC, является высотой, то есть перпендикулярна стороне AC. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный: стороны AB и BC равны.

▷ Посмотрим на треугольники ABM и CBM. В них углы при вершине M прямые по условию, AM = CM, а сторона BM — общая. Значит, по второму признаку равенства треугольников они равны. В частности, равны стороны, противолежащие прямому углу: AB = BC. ◁

69


73. В треугольнике ABC медиана BM, соединяющая точку B с серединой M стороны AC, является биссектрисой угла B. Доказать, что треугольник ABC равнобедренный: стороны AB и BC равны.

▷ Эта задача сложнее предыдущей — тут понадобится дополнительное построение. Это построение часто применяется, когда в задаче идёт речь о медиане. Продолжим медиану BM за точку M на расстояние, равное её длине, и получим точку N, которую соединим с

70


точкой A. Мы уже видели, что треугольник AMN равен треугольнику BMC по двум сторонам и углу между ними (углы при вершине M являются вертикальными, $AM = MC$ по условию, $BM = MN$ по построению). В частности, угол ANM равен углу CBM, и тем самым углу ABM. Значит, в треугольнике ABN углы при стороне BN равны, и потому он равнобедренный: $AB = AN$. Но $AN = BC$ (из равенства треугольников ANM и CBM), так что $AB = BC$, что и требовалось доказать. ◁

Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, перпендикулярная отрезку и проходящая через его середину.

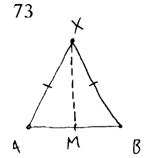
74. Доказать, что любая точка серединного перпендикуляра к отрезку AB равноудалена (находится на одинаковом расстоянии) от точек A и B.

▷ Пусть M — середина отрезка AB, и X находится на серединном перпендикуляре. Соединим X с точками A и B. В треугольниках AXM и BXM два угла прямые, одна сторона (MX) общая. а $AM{=}MB$. Поэтому эти треугольники равны по второму признаку, в частности, $AX = XB$.

(В сущности, мы повторили рассуждение о том, что если медиана является высотой, то треугольник равнобедренный.) ◁

75. Доказать, что любая точка, равноудалённая от точек A и B, лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB.

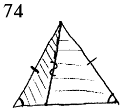
73



▷ Пусть точка X равноудалена от точек A и B. Соединим её с этими точками, получится равнобедренный треугольник AXB. Соединим точку X с серединой стороны AB, которую мы обозначим M. Получится медиана XM этого равнобедренного треугольника, которая, как мы знаем, является высотой. Значит, XM есть серединный перпендикуляр к AB (и точка X на нём лежит). ◁

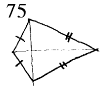
76. Равнобедренный треугольник разделён на два отрезком, соединяющим вершину с некоторой точкой основания. Доказать, что в этих треугольниках можно найти две равные пары сторон и равную пару углов

▷ Равные пары сторон — это две боковые стороны равнобедренного треугольника, а также две стороны, примыкающие друг к другу по линии разреза. Равные углы — углы при основании равнобедренного треугольника. ◁

74


Эта задача показывает, что в первом признаке равенства треугольников важно, что равные углы находятся между соответственно равными сторонами.

Ещё несколько задач

75


77. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ две пары сторон равны: $AB = BC$, $AD = DC$. Доказать, что его диагонали перпендикулярны.

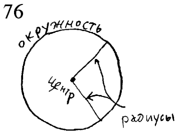
⟨ Соединить вершины B и D с серединой диагонали AC. ⟩

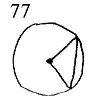
78. Доказать, что в равнобедренном треугольнике медианы, проведённые к его боковым сторонам, равны.

79. Доказать, что в равнобедренном треугольнике биссектрисы, проведённые к его боковым сторонам, равны.

Окружность

Точки, лежащие на заданном расстоянии от заданной точки (*центра*) образуют *окружность*. Расстояние это называют *радиусом* окружности. Отрезок, соединяющий центр окружности с любой из её точек, также называют радиусом. *Круг* — это окружность вместе со всеми точками внутри неё.

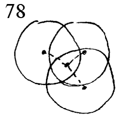
76


77


80. Центр окружности и любые две точки на ней являются вершинами равнобедренного треугольника.

▷ Это — совсем простая задача: две стороны получающегося треугольника являются радиусами и потому равны. ◁

78

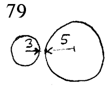


81. Точка X лежит внутри трёх окружностей радиуса 1. Доказать, что их центры можно накрыть кругом радиуса 1.

▷ Нарисуем круг радиуса 1 с центром в точке X. По условию точка X лежит внутри окружностей, значит, расстояние от X до центров окружностей не больше 1, значит, они попадут внутрь нарисованного круга. ◁

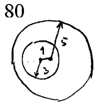
82. Две окружности имеют радиусы 3 и 5, расстояние между их центрами равно 9. Будут ли они пересекаться? Тот же вопрос, если расстояние между их центрами равно 1.

79



▷ Пересечения не будет. В первом случае: если бы X была общей точкой двух окружностей, то расстояния до центров от X были бы 3 и 5, и по неравенству треугольника расстояние между центрами было бы не больше 8.

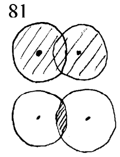
80



Во втором случае меньшая окружность лежит целиком внутри большей. Убедиться в отсутствии точек пересечения снова можно с помощью неравенства треугольника: если бы X была точкой пересечения, то расстояние до центра меньшей окружности было бы 3, расстояние от между центрами 1, значит, расстояние до центра большей окружности было бы не больше 4 (а оно равно 5). ◁

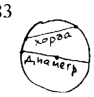
83. Две деревни находятся на расстоянии 3 километра. Нарисовать, где можно устроить пикник, если требуется, чтобы (**a**) расстояние до ближайшей деревни было не более 2 километров; (**b**) расстояние до обеих деревень было не более двух километров.

81



▷ Для каждой деревни есть свой круг — в нём находятся точки, до которых от неё не более 2 километров. В пункте (a) нам годятся точки любого круга, и ответом является (как говорят математики) объединение кругов. В задаче (b) нам годятся точки, попадающие в оба круга, и ответом будет пересечение кругов. ◁

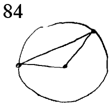
83



Хордой называется отрезок, соединяющий две точки окружности. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром.*

84. Длина хорды не превышает удвоенного радиуса окружности, и равна ему, только если хорда является диаметром.

84

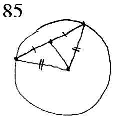


▷ Соединим концы хорды с центром окружности. Получится треугольник, образованный двумя радиусами и хордой. По неравенству треугольника хорда не превосходит суммы двух других сторон, то есть удвоенного радиуса. Равенство возможно, если треугольник превращается в отрезок, то есть если центр окружности лежит на хорде. (А такая хорда называется диаметром.) ◁

Диаметром окружности называют не только проходящую через центр хорду, но и её длину. Поэтому утверждение предыдущей задачи можно прочесть так: длина любой хорды окружности не превосходит диаметра окружности.

85. Доказать, что отрезок, соединяющий середину хорды с центром окружности, перпендикулярен хорде.

85



▷ Этот отрезок является медианой равнобедренного треугольника, образованного двумя радиусами и хордой, и потому является его высотой. ◁

Ещё несколько задач

86. На большом поле есть узкая прямая канава длиной 500 метров. Турист стоит на берегу канавы на расстоянии 200 метров от её конца (и 300 метров от другого конца). Нарисовать часть поля, в которую он может попасть, пройдя не более 400 метров (и не переходя канавы)

$\langle$ Эта область ограничена дугами (частями) окружностей. $\rangle$

87. Две окружности разных радиусов с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках C и D. Доказать, что прямая O_1O_2 перпендикулярна отрезку CD и делит его пополам.

$\langle$ Соединить точки O_1 и O_2 с серединой отрезка CD и показать, что полученные отрезки лежат на одной прямой, перпендикулярной CD. $\rangle$

88. Доказать, что расстояние между двумя точками внутри круга не больше диаметра круга.

89. Доказать, что хорда окружности образует равные углы с радиусами, проведёнными к её концам.

90. Посмотрев вокруг себя, мы увидим довольно много окружностей. Можете ли вы придумать правдоподобное объяснение, почему (или зачем) круглы **(a)** колёса у велосипеда; **(b)** круги на воде; **(c)** луна на небе; **(d)** капля в воздухе; **(e)** крышки канализационных люков; **(f)** стволы деревьев; **(g)** монеты; **(h)** грампластинки и компакт-диски; **(i)** рулоны туалетной бумаги; **(j)** завинчивающиеся крышки от банок; **(k)** радуга на небе. (Не огорчайтесь, если не можете — иногда объяснение требует хорошего знания физики, а иногда возможно несколько правдоподобных вариантов, и трудно выбрать один из них.)

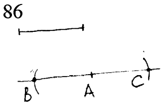
Построения циркулем и линейкой

С помощью линейки можно проводить прямую через две данные точки. С помощью циркуля можно строить окружность с данным центром и данным радиусом. После этого можно отмечать точки пересечения построенных прямых и окружностей и использовать их в дальнейших построениях.

91. Отложить от заданной точки A на заданной прямой l отрезок, равный данному.

▷ Для этого достаточно циркуля: установим раствор циркуля равным длине данного отрезка и построим окружность такого радиуса с центром в A. Она пересечёт прямую l в двух точках, назовём их B и C. Отрезки AB и AC и будут искомыми. ◁

86

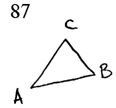


Если бы на линейке были деления (или хотя бы можно было делать карандашные пометки), то циркуль бы не понадобился. Но для нас линейка — это возможность проводить прямую через две данные точки, и не более того.

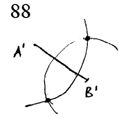
92. Дан треугольник ABC и отрезок $A'B'$, равный отрезку AB. Построить треугольник $A'B'C'$, равный треугольнику ABC.

▷ Положения точек A' и B' нам даны. Надо найти точку C'. Расстояния от неё до точки A' известно: оно равно AB. Значит, она лежит на окружности с центром в A' и радиусом AB. Построим эту окружность. Аналогичным образом точка C' лежит на окружности с центром в B' радиуса BC. Чтобы решить задачу, осталось найти точки пересечения этих окружностей. (Их две, поскольку треугольник можно отложить по обе стороны отрезка $A'B'$.) ◁

87



88



93. Построить треугольник по трём сторонам.

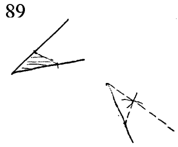
▷ Эта задача отличается от предыдущей тем, что стороны треугольника заданы сами по себе, а не в составе треугольника. Но решение остаётся прежним: мы берем одну из заданных сторон, и вокруг её концов строим окружности, радиусы которых равны двум другим сторонам.

Заметим, что эти окружности могут и не пересечься: если заданные три отрезка не удовлетворяют неравенству треугольника (один больше суммы двух других), то искомого треугольника не существует. ◁

94. Отложить от заданного луча угол, равный данному.

▷ Эту задачу можно свести к уже решённой — возьмём какие-нибудь две точки на сторонах угла, получится треугольник, построим равный ему треугольник (проведя две окружности и найдя их пересечение) — один из углов этого треугольника будем искомым.

89

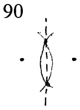


Чтобы задача имела единственное решение, надо ещё указать, в какую сторону от заданного луча надо откладывать угол (и тем самым какую из двух точек пересечения окружностей надо брать). ◁

95. Найти середину данного отрезка.

▷ Мы построим серединный перпендикуляр к отрезку, тем самым будет найдена его середина. Мы знаем, что на серединном перпендикуляре лежат точки, одинаково удалённые от концов отрезка. Поэтому достаточно найти две такие точки и провести через них прямую. Чтобы найти их, построим две окружности равного радиуса с центрами в концах отрезка. Точки их пересечения и будут искомыми.

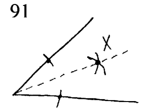
90



Итак, построение: построим две окружности равного радиуса с центрами в концах отрезка и соединим точки их пересечения прямой. Эта прямая и разделит отрезок пополам. ◁

96. Разделить данный угол пополам.

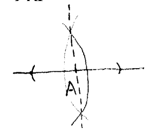
91



▷ Пусть O — вершина угла. Отложим с помощью циркуля на его сторонах равные отрезки OA и OB (их длина, то есть раствор циркуля, может быть любым). Не меняя раствора циркуля, построим две окружности с центрами в A и B. Одной из точек их пересечения будет точка O, обозначим вторую точку пересечения за X. Точки O и X одинаково удалены от A и B и потому лежат на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Значит, прямая OX делит отрезок AB пополам и является медианой равнобедренного треугольника OAB. А мы знаем, что медиана равнобедренного треугольника одновременно является его биссектрисой. ◁

97. Дана точка A на прямой l. Провести через A прямую, перпендикулярную l.

91a

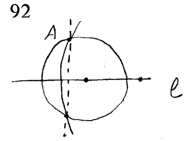


▷ Эту задачу легко свести к уже решённым: мы умеем строить серединный перпендикуляр к отрезку (решение задачи 95), так что достаточно найти на прямой l отрезок, серединой которого была бы точка A. А это легко сделать, отложив от A равные отрезки в разные стороны. ◁

98. Дана точка A, не лежащая на прямой l. Провести через A прямую, перпендикулярную l.

▷ Эту задачу также можно свести к предыдущим: если провести окружность с центром в A, пересекающую прямую в двух точках, то эти точки пересечения равноудалены от A, и потому A лежит на серединном перпендикуляре к отрезку с концами в этих точках. А таковой мы строить умеем. ◁

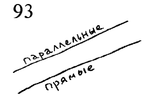
92



Более экономное решение приведено в учебнике И.Ф. Шарыгина: построим две окружности с центрами на прямой l и проходящие через точку A. Они пересекутся в точке A и в ещё одной точке; соединив эти точки прямой, получим искомый перпендикуляр.

Параллельность

93



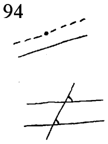
Две различные прямые называются *параллельными*, если они не пересекаются. Прямую считают также параллельно самой себе.

Два основных факта о параллельных прямых:

(1) через точку, не лежащую на прямой, можно провести прямую, паралелльную заданной, причём только одну;

(2) две прямые параллельны в том и только в том случае, если третья прямая пересекает их под равными углами.

94



Утверждение (1) можно пояснить так: если сплошная прямая на рисунке неподвижна, а верхнюю поворачивают вокруг отмеченной точки, то есть ровно одно положение, в котором эти прямые не пересекаются. Если чуть-чуть повернуть прямую налево или направно, то появится точка пересечения (которая будет тем дальше, чем меньше мы повернём прямую).

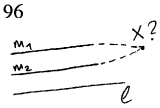
В «неевклидовой» геометрии (геометрии Лобачевского) это утверждение неверно (и отличает неевклидову геометрию от евклидовой): есть целый диапазон углов, в котором прямые не пересекаются.

Традиционно в учебниках геометрии утверждение (1) считают аксиомой, а утверждение (2) выводят как следствие.

99. Доказать, что две прямые параллельные третьей, параллельны между собой.

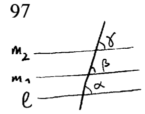
▷ Эту задачу можно решить двумя способами — либо с помощью утверждения (1), либо с помощью утверждения (2). Приведём оба варианта.

96



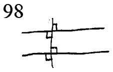
(Первый вариант) Пусть две прямые m_1 и m_2 параллельны третьей прямой l. Могут ли они пересечься в какой-то точке X? Нет, потому что в этом случае через X проходило бы две прямые, параллельные данной. Значит, если у них есть общая точка, то они совпадают (а совпадающие прямые также считаются параллельными).

97



(Второй вариант) Пересечём все три прямые какой-то прямой n. и отметим образующиеся углв как на рисунке. Поскольку прямые l и m_1 параллельны, то углы α и β равны. Поскольку прямые l и m_2 параллельны, то углы α и γ равны. Значит, все три отмеченных угла равны. А из равенства углов β и γ следует параллельность прямых m_1 и m_2. ◁

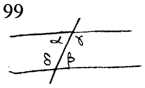
98



100. Доказать, что две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны.

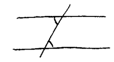
▷ Это — прямое следствие свойства (2) так как все углы, образуемые при пересечении двух прямых их общим перпендикуляром, прямые и потому равны. ◁

99



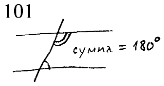
Пары углов, образующихся при пересечении двух прямых третьей (которую традиционно называют *секущей*) имеют традиционные названия, которые мы поясним рисунком. Углы α и β называют *внутренними накрест лежащими*; то же название относится к паре углов γ и δ. Углы α и δ называют *внутренними односторонними*; то же название относится к паре β и γ.

100



Вспоминая, что вертикальные углы равны, а смежные углы составляют в сумме $180°$, можно сформулировать свойство (2) так: *прямые параллельны в том и только том случае, когда внутренние накрест лежащие углы при секущей равны.*

101

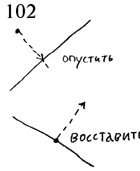


Или так: *прямые параллельны в том и в только том случае, когда внутренние односторонние углы составляют в сумме* $180°$.

101. Доказать, что через данную точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную заданной.

▷ Это — в точности повторение предыдущей задачи: если провести две такие прямые, то они будут двумя перпендикудярами к заданной прямой. По предыдущей задаче они параллельны — и не могут проходить через одну точку (не совпадая)! ◁

102



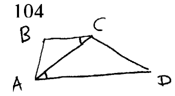
Есть два специальных термина, относящихся в построению перпендикуляров.

Если точка A не лежит на прямой l и мы проводим через A прямую, перпендикулярную l, это называется «опустить из A перпендикуляр на l». (Даже если на рисунке точка A ниже прямой l, всё равно говорят «опустить».)

Если точка A лежит на прямой l и мы проводим через A прямую перпендикулярно l, это называется «восставить перпендикуляр к l в точке A».

Задача 101, таким образом, говорит, что из данной точки можно опустить только один перпендикуляр к данной прямой. (Как это сделать циркулем и линейкой, мы уже видели в задаче 98.

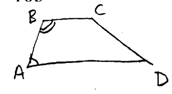
104



102. В четырёхугольнике $ABCD$ угол ACB равен углу CAD. Доказать, что у него есть две параллельные стороны.

▷ Эта задача — прямое следствие свойства (2): по условию накрест лежащие углы ACB и CAD при секущей AC равны, и потому прямые AD и BC параллельны. ◁

105



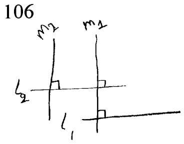
103. Два соседних угла четырёхугольника составляют в сумме 180°. Доказать, что две его стороны параллельны. Доказать, что два других угла также составляют в сумме 180°.

$\triangleright$ Пусть в четырёхугольнике $ABCD$ углы A и B составляют в сумме 180°. Они являются внутренними односторонними углами при секущей AB, и потому прямые AD и BC параллельны.

Теперь рассмотрим сторону CD как секущую, при которой лежат два внутренних односторонних угла C и D. Раз прямые параллельны, по свойству (2) сумма этих углов равна 180°. $\triangleleft$

104. Доказать, что перпендикуляры к параллельным прямым параллельны.

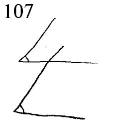
106



$\triangleright$ Пусть l_1 и l_2 — параллельные прямые, m_1 — перпендикуляр к l_1, m_2 — к l_2. Убедимся, что прямые m_1 и l_2 пересекаются под прямым углом. В самом деле, прямая m_1 пересекает две параллельные прямые l_1 и l_2 под равными углами (по свойству (2)).

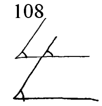
Теперь видно, что m_1 и m_2 — два перпендикуляра к l_2, и потому параллельны (задача 100) $\triangleleft$

107



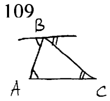
105. Стороны одного угла параллельны сторонам другого (и направлены в те же стороны, см. рисунок). Доказать, что углы равны.

108



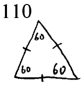
$\triangleright$ Оба эти угла равны третьему, который образуется при пересечении одной стороны одного угла с непараллельной ей стороной другого угла (дважды используем свойство (2)). $\triangleleft$

106. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая, параллельная стороне AC. Отметить на рисунке углы, равные углам A и C треугольника. Вывести отсюда, что сумма углов треугольника равна 180°.

109


▷ Отмеченные на рисунке углы равны углам A и C как внутренние накрест лежащие и дополняют угол B с двух сторон до развёрнутого. ◁

107. В треугольнике все стороны равны. Найти его углы.

110


▷ Равносторонний треугольник (в котором все стороны равны) является частным случаем равнобедренного, причём за основание можно принять любую сторону. Поэтому в нём все углы равны. Так как в сумме углы составляют 180° (предыдущая задача), то каждый из них равен 60°. ◁

108. В равнобедренном треугольнике один из углов равен 80°. Каковы его другие углы? (Указать все возможности.)

▷ В равнобедренном треугольнике два угла при основании равны. Если один из них равен 80°, то в сумме они равны 160°, и на третий угол (при вершине) остаётся 20°. Если же угол при вершине равен 80°, то на два угла при основании остаётся 100°, и каждый из них равен 50°. ◁

109. В равнобедренном треугольнике один из углов равен 60°. Доказать, что треугольник равносторонний.

▷ Неважно, какой именно угол равен 60° (угол при основании или у вершины), всё равно остальные углы тоже равны 60°. Но мы знаем, что если в треугольнике два угла равны, то противолежащие им стороны равны. Значит, раз все три угла равны, то и все три стороны равны. ◁

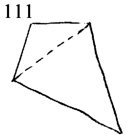
110. Какие значения может принимать наибольший угол треугольника? Какие значения может принимать наименьший угол треугольника? Какие значения может принимать средний по величине угол треугольника?

▷ Если три числа в сумме равны 180, то наибольшее из них не меньше 60 (иначе все остальные меньше 60 и сумма меньше 180. Таким образом, больший угол треугольника может быть от 60° до 180°. По аналогичным соображениям меньший угол может быть от 0° до 60°. Средний угол больше 0° и меньше 90°, так как в сумме с большим углом он меньше 180°. Все эти варианты осуществляются для равнобедренных треугольников. ◁

111. Доказать, что сумма углов выпуклого четырёхугольника равна 360°, разрезав его на два треугольника.

▷ Проведя диагональ, мы разрезаем четырёхугольник на два треугольника. При этом два угла четырёхугольника разбиваются на два каждый. Если мы сложим все углы двух треугольников, то получим $2 \times 180° = 360°$. С другой стороны, эта сумма представляет собой сумму углов четырёхугольника (если сгруппировать углы с общими вершинами). ◁

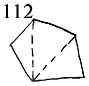
111



112. Чему равна сумма углов выпуклого пятиугольника?

▷ Как и в предыдущей задаче, разрежем его на треугольники. проведя две диагонали. Получится 3 треугольника. Значит, сумма углов выпуклого пятиугольника равна $3 \times 180° = 540°$. ◁

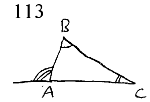
112



113. Найти сумму углов выпуклого n-угольника.

▷ Возьмём одну из вершин и проведём из неё все диагонали. Их будет $n-3$ (нет диагоналей в эту вершину и в две соседние). Они разрезают многоугольник на $n-2$ треугольника (каждый разрез увеличивает число частей на 1, вначале была одна часть). В каждом треугольнике сумма углов равна 180°. Складывая все углы всех треугольников, получаем сумму всех углов многоугольника, которая тем самым равна $180(n-2)°$. ◁

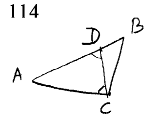
113



114. Доказать, что внешний угол при вершине A треугольника ABC (см. рисунок) равен сумме углов B и C.

▷ Сумма трёх углов треугольника равна 180°. Следовательно, сумма двух из них равна разности 180° и третьего угла, то есть равна углу, смежному с третьим. Что и требовалось доказать. ◁

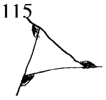
114



115. Сторона AB треугольника ABC длиннее стороны AC, и на ней отложен отрезок AD, равный отрезку AC. Доказать, что угол при основании равнобедренного треугольника ACD настолько же больше угла B, насколько меньше угла C.

▷ Углы при основании CD равнобедренного треугольника ACD равны. Один из них меньше угла C на величину угла DCB. Другой является внешним углом треугольника DCB, и потому равен сумме угла DCB и угла B. Следовательно, в обоих случаях разница равна величине угла DCB. ◁

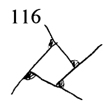
115



116. Чему равна сумма внешних углов при трёх вершинах треугольника?

▷ Вместе с тремя внутренними углами (которые в сумме дают 180°) получается три развёрнутых угла, то есть 540°, поэтому сумма внешних углов равна $540 - 180 = 360°$. ◁

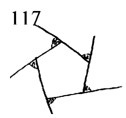
116



117. Чему равна сумма внешних углов при четырёх вершинах четырёхугольника?

▷ Вместе с 4 внутренними углами (которые в сумме дают 360°) получается 4 развёрнутых угла, то есть 720°, поэтому сумма внешних углов равна $720 - 360 = 360°$. ◁

117



118. Чему равна сумма внешних углов при пяти вершинах пятиугольника?

▷ Вместе с 5 внутренними углами (которые в сумме дают 540°) получается 5 развёрнутых углов, то есть 900°, поэтому сумма внешних углов равна $900 - 540 = 360°$. ◁

Аналогичным способом можно убедиться, что сумма внешних углов шести-, семи- и вообще n-угольника равна 360°. В самом деле, вместе с внутренними углами получается n развёрнутых углов, то есть $n \cdot 180°$, а внутренние углы дают $(n-2) \cdot 180°$, так что на долю внешних приходится разница в $2 \cdot 180 = 360°$.

Впрочем, есть другое, более наглядное (хотя и менее формальное) объяснение. Представим себе автомобиль, который объезжает многоугольник по периметру. Углы многоугольника являются точками поворота автомобиля. В каждой точке он поворачивает на угол, равный внешнему углу многоугольника. Объехав круг, автомобиль сделает полный оборот, то есть $360°$.

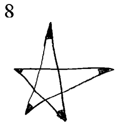
119. Дана прямая и точка, на ней не лежащая. Как провести (циркулем и линейкой) прямую через данную точку, параллельную данной прямой?

▷ Вот один из способов. Пусть даны прямая l и точка A. Проведём через точку A какую-нибудь прямую m, пересекающую прямую l. Искомая прямая пересекает прямую m тод тем же углом, что и прямая l, так что надо просто отложить этот угол от прямой l (задача 94)

Можно выбрать угол пересечения прямым: опускаем из A перпендикуляр m на прямую n, а затем из той же точки A восставляем перпендикуляр к прямой m (используя задачи 98 и 97). ◁

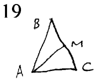
Ещё несколько задач

118



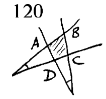
120. Доказать, что сумма пяти углов у вершин пятиконечной звезды (см. рисунок) одинакова у всех звёзд. Чему она равна?

119



121. Треугольник ABC — равнобедренный ($AB = BC$). Отрезок AM делит его на два равнобедренных треугольника с основаниями AB и MC. Найти угол B.

120



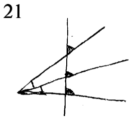
122. Продолжения двух противоположных сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$ пересекаются под углом $20°$, продолжения двух других противоположных сторон (AD, BC) — тоже. Доказать, что два угла в четырёхугольнике равны, а два других отличаются на $40°$.

123. Стороны угла в 75° перпендикулярны сторонам другого угла. Чему может быть равен этот угол? (Возможны разные варианты.)

124. Две прямые движутся параллельно самим себе. Доказать, что угол между ними остаётся неизменным.

125. Вспоминая доказательство формулы для суммы углов n-угольника, получить в качестве следствия, что при любом способе разрезания диагоналями выпуклого n-угольника на треугольники (диагонали не обязаны выходить из одной вершины) получается одно и то же число треугольников $(n-2)$.

121



126. Прямая пересекает стороны угла и его биссектрису, образуя три угла (см. рисунок). Доказать, что средний из этих углов равен полусумме крайних.

127. Через данную точку проведите прямую, которая пересекает две данные (не параллельные) прямые под равными углами.

Прямоугольные треугольники

Прямоугольным называется треугольник, в котором один из углов прямой. Прилежащие к этому углу стороны называются *катетами* треугольника, а противолежащая сторона — *гипотенузой*.

128. Доказать, что в прямоугольном треугольнике углы при гипотенузе в сумме составляют прямой угол.

▷ Сумма всех трёх углов составляет 180°, значит, на долю двух острых остаётся $180 - 90 = 90^\circ$. ◁

129. Найти углы прямоугольного равнобедренного треугольника.

▷ Углы при основании равнобедренного треугольника равны, а в сумме составляют 90°, так что каждый из них равен 45°. ◁

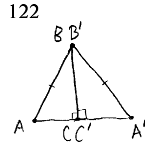
Несколько следующих задач дают признаки равенства прямоугольных треугольников.

130. Доказать, что (a) если у двух прямоугольных треугольников равны соответствующие катеты, то треугольники равны; (b) если у двух прямоугольных треугольников равны катеты и прилегающие к ним острые углы, то треугольники равны.

▷ Эти признаки не требуют специального доказательства: они всего лишь частные случаи первого и второго признаков равенства треугольников, когда один из углов прямой. ◁

131. Катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника равны катету и гипотенузе другого. Доказать, что треугольники равны.

122



▷ Приложим треугольники друг к другу равными катетами BC и B′C′ (см. рисунок). Поскольку треугольники прямоугольные, то два других катета составят одну прямую (AA′) и два треугольника составят больший треугольник. По условию гипотенузы равны, поэтому этот больший треугольник получится равнобедренным. Докажем, что точка C (совмещённая с C′) является серединой AA′. В самом деле, если серединой AA′ была какая-нибудь другая точка M, то BM была бы медианой равнобедренного треугольника ABA′, а потому и его высотой, и мы получили бы два разных перпендикуляра, опущенных из точки B на прямую AA′ — отрезки BC и BM. Значит, C и M совпадают, отрезки AC и A′C′ равны и наши треугольники равны, например, по двум катетам. (Или по трём сторонам.) ◁

132. Гипотенуза одного прямоугольного треугольника равна гипотенузе другого; один из прилегающих к ней углов равен углу при гипотенузе другого треугольника. Доказать, что треугольники равны.

▷ Поскольку в обоих треугольниках сумма углов равна 180° и у них есть два равных угла, то равны и третьи углы, и треугольники равны по гипотенузе и двум примыкающим к ней углам. ◁

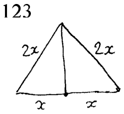
133. Катет одного прямоугольного треугольника равен катету другого; противолежащие им углы также равны. Доказать, что треугольники равны.

▷ В каждом из двух треугольников острые углы в сумме дают 90°, поэтому если противолежащие равным катетам углы равны, то и прилежащие к ним углы тоже равны. Остаётся воспользоваться вторым признаком равенства треугольников. ◁

134. В прямоугольном треугольнике один из катетов вдвое короче гипотенузы. Найти углы треугольника.

▷ Возьмём два таких треугольника и приложим их длинными катетами друг к другу. Короткие катеты будут составлять один отрезок (углы прямые). Длина этого отрезка по условию равна длине гипотенузы, так что получится равносторонний треугольник, в котором углы равны 60°. Ответ: 60°, 30°, 90°. ◁

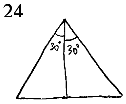
123



135. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°. Доказать, что один из катетов вдвое короче гипотенузы.

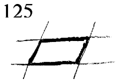
▷ Приложим два таких треугольника друг к другу катетами так, чтобы два угла в 30° образовали угол в 60°. Получится равнобедренный треугольник с углом при вершине 60°, который будем равносторониим. Следовательно, удвоенный меньший катет равен гипотенузе, что и требовалось доказать. ◁

124



Параллелограммы

125

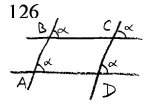


Четырёхугольник $ABCD$ называется *параллелограммом*, если его противоположные стороны попарно параллельны.

136. Доказать, что в параллелограмме углы при соседних вершинах дают в сумме 180°, а углы при противоположных вершинах равны.

▷ Пусть ABCD — параллелограмм. По основному свойству параллельных прямых все четыре отмеченных на рисунке угла равны. Обозначим их велиниу через α. Тогда углы A и C равны α (второй — как вертикальный к углу α), а углы B и D являются смежными к углам величины α и потому равны $180° - \alpha$. ◁

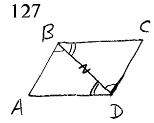
126



137. Доказать, что диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

▷ Проведём в параллелограмме ABCD диагональ BD. Поскольку стороны AB и CD параллельны, углы ABD и BDC равны как накрест лежащие. Аналогичным образом параллельность сторон BC и AD гарантирует, что углы CBD и BDA равны. Диагональ BD является общей стороной треугольников ABD и BDC. Остаётся воспользоваться признаком равенства треугольников по стороне и двум углам. ◁

127



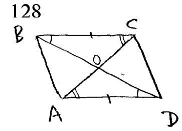
138. Доказать, что противоположные стороны параллелограмма равны.

▷ Это является очевидным следствием предыдущей задачи: если треугольники равны, то равны и их стороны. ◁

139. Диагонали делят параллелограмм на 4 треугольника. Доказать, что среди них есть две пары равных.

▷ Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелограмма ABCD. Докажем, что треугольники AOD и BOC равны. В самом деле, стороны AD и BC равны (по предыдущей задаче), углы OAD и OCB, а также ODA и OBC равны как внутренние накрест лежащие. Осталось применить признак равенства треугольников по стороне и двум углам. ◁

128

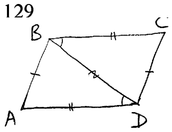


140. Доказать, что точка пересечения диагоналей параллелограмма делит каждую из диагоналей пополам.

▷ Это очевидно следует из предыдущей задачи: в равных треугольниках равны стороны. ◁

141. Доказать, что если в четырёхугольнике $ABCD$ противоположные стороны попарно равны ($AB = CD$, $AD = BC$), то это параллелограмм.

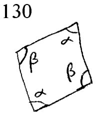
129



▷ Проведём диагональ BD. Она разделит четырёхугольник на два треугольника, которые равны по трём сторонам (BD — общая, остальные пары сторон равны по предположению). Следовательно, углы CBD и BDA равны, поэтому прямые AD и BC параллельны (углы являются внутренними накрест лежащими). Аналогичным образом прямые AB и CD параллельны, и $ABCD$ — параллелограмм. ◁

142. Доказать, что четырёхугольник, в котором противоположные углы попарно равны, является параллелограммом.)

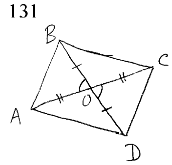
130



▷ Пусть два противоположных угла четырёхугольника равны α, а два других угла равны β. Тогда сумма всех углов, то есть $2\alpha + 2\beta$, равна $360°$, поэтому $\alpha + \beta = 180$. Поэтому противоположные стороны четырёхугольника параллельны (углы α и β являются при них внутренними односторонними). ◁

143. Точка пересечения диагоналей четырёхугольника делит каждую из них пополам. Доказать, что это — параллелограмм.

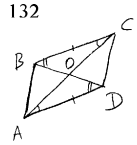
131



▷ Пусть O — точка пересечения диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Треугольники AOB и COD равны по первому признаку (углы при вершине O вертикальны, стороны равны по условию). В частности, углы OAD и OCB равны. А они являются внутренними накрест лежащими при секущей AC, поэтому стороны AD и BC параллельны. Аналогичным образом (какие для этого нужны треугольники?) доказывается, что стороны AB и CD параллельны. ◁

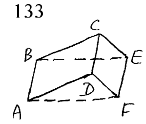
144. Доказать, что если в четырёхугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны, то это параллелограмм.

132



▷ Проведём диагонали; пусть O — точка их пересечения. Рассмотрим треугольники AOD и BOC. Они равны по стороне и двум углам ($AD = BC$, примыкающие углы равны как внутренние накрест лежащие), поэтому $AO = OC$, $BO = OD$. Теперь можно сослаться на предыдущую задачу (или повторить рассуждение: треугольники AOB и COD равны по углу и двум сторонам). ◁

133

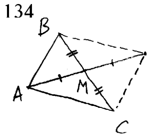


145. Два параллелограмма $ABCD$ и $DCEF$ приложены друг к другу общей стороной CD. Доказать, что четырёугольник $ABEF$ — тоже параллелограмм.

▷ Посмотрим на отрезки AB, DC и FE. Так как $ABCD$ — параллелограмм, первый отрезок параллелен и равен второму. Так как $DCFE$ — параллелограмм, второй отрезок равен и параллелен третьему. Поэтому первый и третий отрезки равны и параллельны (вспомним, что две прямые, параллельные третьей, параллельны друг другу). Остаётся сослаться на предыдущую задачу. ◁

146. В треугольнике ABC медиана AM продолжена за точку M до точки D на расстояние, равное AM (так что $AM = MD$). Доказать, что $ABDC$ — параллелограмм.

134



▷ В получающемся четырёхугольники диагонали делятся точкой пересечения пополам по построению, остаётся воспользоваться задачей 143. ◁

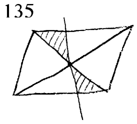
Такая конструкция — продолжение медианы вдвое — нам уже встречалась. С её помощью мы доказывали, что медиана в треугольнике не превосходит полусуммы двух примыкающих к ней сторон.

Точку пересечения диагоналей параллелограмма называют его *центром*.

147. Прямая проходит через центр параллелограмма. Доказать, что её отрезок, заключенный внутри параллелограмма, делится центром пополам.

▷ В заштрихованных треугольниках равны стороны, являющиеся половинками диагонали (центр делит обе диагонали пополам) и примыкающие к ним углы (одна пара — вертикальные углы, другая — внутренние накрест лежащие). ◁

135



Ещё несколько задач

148. Имеются две одинаковые треугольные керамические плитки. Как сложить из них параллелограмм? (Разрешается одну из плиток перевернуть.) Как выложить плоскость одинаковыми треугольными плитками? (Форма плитки может быть любой. Плитки можно переворачивать.)

149. Доказать, что отрезок, соединяющий середины противоположных сторон параллелограмма, проходит через его центр.

Прямоугольник, ромб, квадрат

Параллелограмм, в котором все углы прямые, называется *прямоугольником.*

150. Если в параллелограмме есть хотя бы один прямой угол, то это прямоугольник.

▷ В параллелограмме противоположные углы равны, а сумма соседних углов равна 180°. Поэтому если один из углов равен 90°, то и соседние, и противоположный также будут равны 90°. ◁

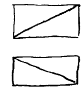
151. Четырёхугольник, в котором все углы прямые — прямоугольник.

▷ Надо доказать, что это параллелограмм. В самом деле, противоположные стороны параллельны, так как сумма внутренних односторонних углов равна двум прямым углам. ◁

152. Доказать, что диагонали прямоугольника равны.

▷ Разрежем этот параллелограмм диагональю на два треугольника двумя способами (проведя разные диагонали). Все четыре треугольника будут прямоугольные и будут иметь одинаковые катеты (равные сторонам прямоугольника). Поэтому они равны, и их гипотенузы тоже равны. ◁

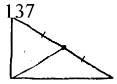
136



153. Доказать, что если в параллелограмме диагонали равны, то это прямоугольник.

▷ Как и в предыдущей задаче, разрежем его на треугольники двумя способами. Снова все эти треугольники равны, но по другой причине: по трём сторонам (которыми являются стороны параллелограмма и его диагональ). Поэтому все углы параллелограмма равны. В сумме они дают 360°, значит, все они прямые. ◁

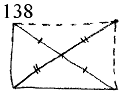
137



154. Доказать, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы.

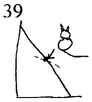
▷ Снова применим приём удвоения медианы. Пусть ABC — прямоугольный треугольник, угол A — прямой, AM — медиана (так что M — середина стороны BC). Продолжим AM за точку M на расстояние, равное AM, получим точку N, которую мы соединим с вершинами B и C. В четырёхугольнике ABNC диагонали делятся пополам точкой пересечения, значит, это параллелограмм. Один из углов его прямой, значит, это прямоугольник. В прямоугольнике диагонали равны — значит, удвоенная медиана равна стороне BC. ◁

138



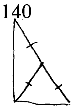
155. У вертикальной стены стоит лестница, которая начинает скользить вниз. По какой линии двигается кошка, сидящая на середине лестницы?

139

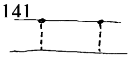


▷ По окружности. В самом деле, лестница является гипотенузой прямоугольного треугольника, а кошка — серединой гипотенузы, поэтому расстояние от кошки до вершины прямого угла равно половине длины лестницы и не меняется. Значит, кошка двигается по (части) окружности. ◁

140



141

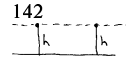


156. Из двух точек прямой опущены перпендикуляры на параллельную ей прямую. Доказать, что они равны.

▷ В самом деле, получается четырёхугольник, в котором все углы прямые, то есть прямоугольник. Его противоположные стороны равны. ◁

Таким образом, расстояние между двумя параллельными прямыми можно определить как длину отрезка, высекаемого ими на перпендикулярной прямой — по предыдущей задаче оно не зависит от того, где мы проведём этот перпендикуляр.

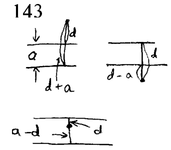
142



157. Перпендикуляры, опущенные из точек A и B на прямую l, равны. Доказать, что отрезок AB параллелен прямой l.

158. Две параллельные прямые находятся на расстоянии a. Точка находится на расстоянии d от одной из них. Каким может быть её расстояние от другой прямой? (Указать все варианты.)

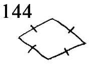
143



▷ Проведём через данную точку общий перпендикуляр к параллельным прямым. Прямые делят его на три части. В зависимости от того, в какой части оказалась данная точка, возможны три ответа: $d+a$, $d-a$, $a-d$. ◁

Ромбом называется параллелограмм, в котором все стороны равны.

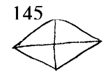
144



159. Четырёхугольник, в котором все стороны равны, является ромбом.

▷ Достаточно вспомнить, что четырёхугольник, в котором равны противоположные стороны, является параллелограммом. ◁

145



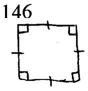
160. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

▷ Разрежем его диагоналями на четыре треугольника. Они окажутся равными по трём сторонам. Значит, все четыре угла, возникающие при пересечении диагоналей, равны. Значит, они прямые. ◁

161. Если в параллелограмме диагонали пересекаются под прямым углом, то это ромб.

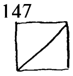
▷ Как и в предыдущей задаче, разрежем параллелограм на четыре треугольника диагоналями. Они снова равны, только теперь не по трём сторонам, а по двум сторонам и (прямому) углу между ними. ◁

146



Прямоугольник, являющийся одновременно ромбом, называется *квадратом*: у него все стороны равны, а все углы прямые.

147



162. Какой угол образует диагональ квадрата с его стороной?

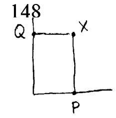
▷ Это — острый угол в прямоугольном равнобедренном треугольнике, который равен 45°. ◁

Ещё несколько задач

163. Доказать, что в прямоугольнике точка пересечения диагоналей равноудалена от всех четырёх вершин.

164. Доказать, что вершины прямоугольного треугольника лежат на окружности, центр которой находится в середине гипотенузы.

148

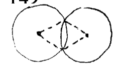


165. Дан прямой угол. Из произвольной точки X внутри этого угла опускают перпендикуляры XP и XQ на стороны этого угла. Нарисовать, где находятся точки X, для которых расстояние между точками P и Q меньше 1.

166. Какое максимальное число прямях углов может иметь четырёхугольник, не будучи прямоугольником?

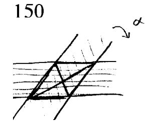
167. Какое максимальное число равных сторон может иметь четырёхугольник, не будучи ромбом?

149



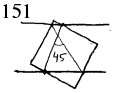
168. Две окружности одинакового радиуса пересекаются в двух точках. Доказать, что их точки пересечения и центры лежат в вершинах ромба.

150



169. Бумажная полоска имеет параллельные прямые края. Две такие полоски одинаковой ширины наложены друг на друга. Доказать, что в пересечении получается ромб. На какой угол повернутся диагонали ромба, если одну из полосок повернуть на угло α?

151



170. Два угла квадрата со стороной a выступают за пределы полосы ширины a с параллельными краями. Стороны квадрата пересекают края полосы в четырёх точках. Доказать, что диагонали четырёхугольника, вершинами которого являются эти точки, пересекаются под углом в $45°$.

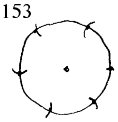
⟨ Используйте предыдущую задачу. ⟩

Равносторонние треугольники

152

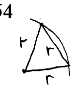
Напомним, что если в треугольнике все стороны равны, то все углы равны $60°$.

153



171. С помощью циркуля нарисуйте окружность. После этого, не меняя раствора циркуля, отложите на окружности шесть раз расстояние, равное её радиусу (расстояние считается не по окружности, а по хорде). Если сделать это аккуратно, то последняя точка совпадёт с начальной. Почему?

154



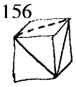
▷ Две соседние точки и центр окружности являются вершинами треугольника (его сторорны — радиусы и хорда), и треугольник этот равносторонний. Значит, все углы равны $60°$, и шесть таких углов заполняют полный круг. ◁

155

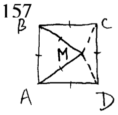
172. Найти угол между диагоналями соседних граней куба, имеющими общий конец (см. рисунок).

▷ Достаточно провести еще одну диагональ, чтобы стало ясно, что интересующий нас угол является углом равностороннего треугольника и потому равен 60°. ◁

156



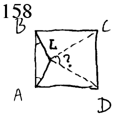
157



173. Внутри квадрата $ABCD$ построен равносторонний треугольник ABM, и вершина M соединена с точками C и D. Найти углы треугольника CMD.

▷ Углы равностороннего треугольника равны 60°, поэтому угол при вершине A равнобедренного треугольника AMD равен $90 - 60 = 30°$. Поэтому углы при его основании равны $(180-30)/2 = 75°$. Значит, угол CDM равен $90 - 75 = 15°$. ◁

158



174. Внутри квадрата $ABCD$ построен равнобедренный треугольник ABL с основанием AB и углами при основании, равными 15°. Под каким углом из вершины L видна сторона CD?

▷ Конечно, эта задача по существу совпадает с предыдущей: построим правильный треугольник CDM внутри квадрата, тогда AM и BM будут как раз идти под углом 15° к сторонам, то есть M совпадёт с L. Но если не знать предыдущей задачи, то эта задача окажется довольно трудной — как догадаться, что треугольник CDL правильный, не зная этого заранее?! ◁

Ещё несколько задач

159

175. На сторонах правильного треугольника ABC по часовой стрелке от вершин A, B и C отложены равные отрезки AA_1, BB_1 и CC_1. Доказать, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

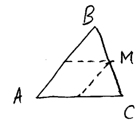
176. В прямоугольнике $ABCD$ стороны AB и CD вдвое короче сторон BC и AD. На стороне BC выбрана точка M, для которой угол MAB равен 15°. Найти угол MDA.

177. Высота треугольника вдвое меньше стороны, на которую она опущена, а один из углов, примыкающих к этой стороне, равен 75°. Найти углы треугольника.

Средняя линия треугольника

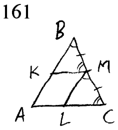
178. Через середину M стороны BC треугольника ABC проведены прямые, параллельные сторонам AB и AC. Доказать, что они пересекают стороны AC и AB в их серединах.

160

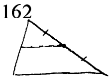


▷ Эти прямые разрезают треугольник на два треугольника BMK и MCL и на четырёугольник $AKML$, который по построению является параллелограммом. Треугольники BMK и MCL равны по сторонам $BM = MC$ и прилегающим к ним углам (которые равны как углы при секущей). В частности, $KM = LC$. С другой стороны, $KM = AL$ как противоположные стороны параллелограмма, так что все три отрезка KM, AL и LC равны, и L — середина AC. Аналогично M — середина BC. ◁

161



162



179. Отрезок, проведённый через середину одной из сторон треугольника параллельно другой стороне, делит третью сторону пополам.

▷ Ровно это и утверждалось в предыдущей задаче (для двух таких отрезков). (Мы специально сначала спросили вас про два отрезка, так как удобнее доказывать это для двух отрезков одновременно.) ◁

180. Доказать, что отрезок, соединяющий середины двух сторон (AB и AC) треугольника ABC, параллелен третьей стороне (AC) и вдвое короче её.

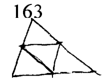
▷ В предыдущей задаче мы проводили отрезок через середину M стороны BC параллельно стороне AC и убеждались, что он делит сторону AB пополам. Теперь же мы разделили сторону AB пополам и хотим убедиться, что соединяющий середины сторон отрезок параллелен стороне AC. Но это одно и то же: обе задачи говорят, что два построенных отрезка (идущий из M в середину стороны AB и идущий из M параллельно стороне AC) совпадают. ◁

Такой отрезок называют *средней линией* треугольника.

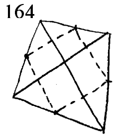
181. Любой треугольник можно разрезать на 4 равных треугольника. Как?

▷ Провести четыре средние линии — во всех получившихся треугольниках стороны будут равны половинам сторон исходного, и потому все четыре треугольника будут равны. ◁

163



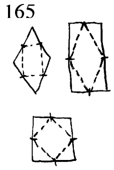
164



182. Середины сторон любого четырёхугольника являются вершинами параллелограмма. Каковы стороны этого параллелограмма, если диагонали исходного четырёхугольника равны a и b?

▷ Диагональ четырёхугольника разрезает его на два треугольника. В них две стороны будущего параллелограмма являются средними линиями, и потому они равны половине диагонали и параллельны ей. Поэтому получается параллелограмм со сторонами $a/2$ и $b/2$. ◁

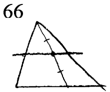
165



183. Доказать, что середины сторон ромба образуют прямоугольник, середины сторон прямоугольника образуют ромб, а середины сторон квадрата — квадрат.

▷ Решение предыдущей задачи показывает, что стороны параллелограмма параллельны диагоналям четырёхугольника и равны их половинам. Поэтому если диагонали перпендикулярны (как у ромба), то получится прямоугольник, а если диагонали равны (как у прямоугольника), то получится параллелограмм с равными сторонами, то есть ромб. Для квадрата получится ромб и прямоугольник одновременно, то есть квадрат. ◁

166

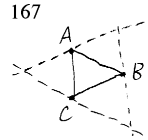


184. Доказать, что средняя линия треугольника делит пополам любой отрезок, соединяющий вершину треугольника с точкой на противоположной стороне.

▷ В самом деле, этот отрезок разбивает треугольник на два. В каждом из треугольников имеется прямая (средняя линия большого треугольника), которая проходит через середину одной стороны параллельно основанию. Как мы видели, такая прямая будет средней линией. ◁

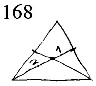
185. Даны три произвольные точки на плоскости, не лежащие на одной прямой. Построить треугольник, у которого они будут серединами сторон.

167



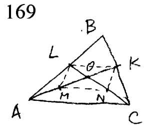
▷ Отрезки, соединяющие заданные точки (A, B, C), будут средними линиями искомого треугольника, поэтому его стороны легко построить (проведя через A прямую, параллельную BC и так далее). Получатся 4 равных треугольника (они равны, так как диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника), поэтому точки A, B, C будут серединами сторон большого треугольника. ◁

168



186. В треугольнике проведены две медианы. Доказать, что точка их пересечения делит каждую из медиан в отношении $2:1$ (считая от вершины).

169



▷ Пусть в треугольнике ABC медианы AK и CL пересекаются в точке O. Нам надо доказать, что $AO : OK = CO : OL = 2 : 1$. Отметим середины отрезков AO (пусть это будет точка M) и CO (точка N). Надо доказать, что каждая медиана разделилась на три равные части.

Проведём отрезки LK и MN. Каждый из них является средней линией в треугольнике (треугольники ABC и AOC). Поэтому каждый из них параллелен стороне AC и равен её половине. Значит, $KLNM$ — параллелограмм. А потому диагонали его, пересекаясь делятся пополам. Таким образом, два отрезка из трёх, на которые делится медиана, равны. Но точки M и N по построению были серединами отрезков AO и CO, значит, и все три отрезка, на которые делится медиана, равны. ◁

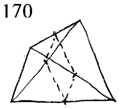
187. Доказать, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

▷ По существу, мы уже это доказали в предыдущей задаче. В самом деле, проведём одну из медиан. В какой точке пересечёт её вторая медиана? Это мы знаем: в точке, делящей её в отношении $2 : 1$ (на расстоянии трети от конца). А где пересечёт её третья медиана? Точка пересечения первой и третьей медианы тоже должна делить первую медиану в отношении $2 : 1$, и потому это та же самая точка! ◁

188. Из вершин треугольника ABC проведены отрезки AK, BL и CM, соединяющие их с некоторыми точками на противоположных сторонах. Могут ли середины этих трёх отрезков лежать на одной прямой?

⟨ Где может находиться каждая из этих точек? ⟩

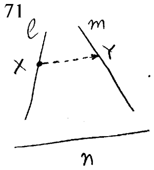
170



189. Доказать, что середины противоположных сторон четырёхугольника и середины его диагоналей являются сторонами параллелограмма. Найти его стороны, если известны стороны четырёхугольника.

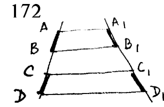
Теорема Фалеса

171



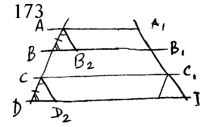
Пусть даны три прямые l, m и n. Рассмотрим точку на прямой l, которая отбрасывает тень на прямую m («экран»), когда свет падает вдоль прямой n. Другими словами, тенью точки X на прямой l называется такая точка Y на прямой m, что отрезок XY параллелен прямой n.

172



190. (Теорема Фалеса) Равные отрезки отбрасывают равные тени. (Точки A, B, C, D лежат на прямой l, точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат на прямой m. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 параллельны прямой n. Известно, что $AB = CD$. Доказать, что $A_1B_1 = C_1D_1$.

173



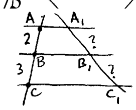
▷ Проведём отрезки AB_2 и CD_2 параллельно прямой m. Они параллельны друг другу, и потому в треугольниках ABB_2 и CDD_2 углы A и C равны. Прямые BB_1 и DD_1 также параллельны, поэтому и углы B и D в этих треугольниках равны. Следовательно, треугольники равны по стороне и двум углам. В частности, $AB_2 = CD_2$. Остаётся заметить, что $AA_1B_1B_2$ и $CC_1D_1D_2$ — параллелограммы, у которых противоположные стороны равны (и потому все четыре отрезка AB_2, CD_2, A_1B_1 и C_1D_1 равны). ◁

191. Теорема Фалеса показывает, что если точка X равномерно движется по прямой l (то есть покрывает равные расстояния за равные времена), то её тень Y равномерно движется по прямой m. Может ли Y двигаться быстрее X? Медленнее X?

▷ Возможно и то, и другое (см. рисунок) ◁

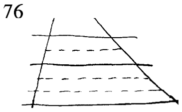
174

175



192. Точки A, B, C лежат на прямой l, точки A_1, B_1, C_1 — их тени на m. Точка B делит отрезок AC в отношении $2:3$. Доказать, что точка B_1 делит отрезок A_1C_1 также в отношении $2:3$.

176

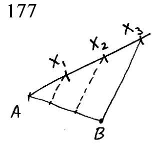


▷ Достаточно разделить отрезок AC на пять равных частей, две из которых составят AB, а три — BC, и провести через точки деления прямые, параллельные прямой n. По теореме Фалеса они высекут на прямой m пять равных отрезков, два из которых составят отрезок A_1B_1, а три — B_1C_1. ◁

193. Если два отрезка на прямой l относятся как $5:7$, то их тени на прямой m также относятся как $5:7$.

▷ Разобьём первый отрезок на 5 частей, а второй на 7 — тогда все части будут равными. Проведём через точки деления прямые параллельно прямой n, Эти прямые разобьют тени отрезков на 5 и 7 частей, и по теореме Фалеса все части будут равными. ◁

177



194. С помощью циркуля и линейки разделить данный отрезок на 3 равные части.

▷ Пусть AB — данный отрезок. Проведем через точку A какой-нибудь луч и отложим на нём три равных отрезка AX_1, X_1X_2 и X_2X_3. Теперь соединим X_3 с точкой B, получится прямая. Проведём параллельные ей прямые через точки X_1 и X_2 (как мы знаем, это можно сделать с помощью циркуля и линейки). Эти прямые по теореме Фалеса разделят отрезок AB на три равные части. ◁

Справедлива общая *теорема Фалеса*: длины отрезков относятся так же, как длины их теней.

Для случая, когда отрезки имеют общую меру (отрезок, укладывающийся в обоих целое число раз), мы это по существу уже доказали в задаче 193. Общее доказательство использует тот факт, что любое число может быть сколь угодно точно приближено дробью с целым числителем и знаменателем.

Возвращаясь к формулировке общей теоремы Фалеса, можно прочитать её так: фиксируем три параллельные прямые и будем пересекать их разными прямыми. На каждой секущей получается два смежных отрезка. Теорема гласит, что отношение этих отрезков не зависит от выбора секущей.

195. Отрезок на прямой l втрое длиннее своей тени. Доказать, что любой другой отрезок на прямой l также втрое длиннее своей тени.

▷ Это следует из общей теоремы Фалеса и свойств пропорций. В самом деле, пусть отрезок втрое длиннее своей тени. Если длину отрезка увеличить в какое-то число раз, то по теореме Фалеса его тень увеличится во столько же раз, и отрезок останется втрое длиннее своей тени. ◁

Ещё несколько задач

196. В треугольнике ABC на сторонах AB и BC взяты точки D и E, делящие их в отношении $3:4$ (так что $AD : DB = 3 : 4$, $CE : EB = 3 : 4$). Доказать, что DE параллельно AC.

Трапеция

Четырёхугольник, в котором две противоположные стороны параллельны, называется *трапецией*. (Иногда требуют, чтобы две другие стороны не были бы параллельны, исключая параллелограммы из числа трапеций.) Параллельные друг другу стороны называют *основаниями* трапеции, а две другие — её *боковыми сторонами*.

197. Два из углов трапеции равны 60° и 130°. Что можно сказать о её остальных углах?

▷ Углы при боковой стороне трапеции составляют в сумме 180° (как внутренние односторонние). Поэтому в трапеции есть ещё углы $180°-60° = 120°$ и $180°-130° = 50°$. Таким образом, все четыре угла найдены. ◁

198. Два из углов трапеции равны 60° и 120°. Что можно сказать о её остальных углах?

▷ Разница с предыдущей задачей в том, что сейчас данные углы составляют в сумме 180° и потому вполне могут быть углами при одной и той же боковой стороне трапеции. Тогда углы при другой стороне трапеции могут быть произвольными, надо только, чтобы в сумме они давали 180°. ◁

199. Доказать, что отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, параллелен её основаниям.

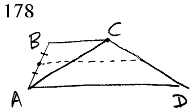
▷ Будем действовать «в обратном направлении»: проведём через середину боковой стороны отрезок, параллельный основанию, и убедимся, что он разделит её пополам (и тем самым совпадёт с отрезком из условия задачи). Но это — прямое следствие теоремы Фалеса. ◁

Отрезок, соединяющий середины сторон, называют *средней линией* трапеции.

200. Доказать, что средняя линия трапеции равна полусумме её оснований. (Указание. Проведите диагональ трапеции.)

▷ Проведём диагональ AC трапеции $ABCD$. Затем через середину боковой стороны AB проведём прямую,

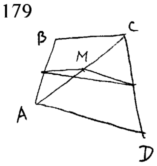
178



параллельную основаниям трапеции. Она пересечёт диагональ трапеции в её середине (как мы видели в разделе о средней линии треугольника). Далее она пересечёт боковую сторону CD, также в её середине. Тем самым средняя линяя трапеции окажется разбитой на два отрезка, один из которых есть средняя линия треугольника ABC, а другой — средняя линия треугольника ACD. Каждый из этих отрезков равен половине соответствующего основания трапеции. ◁

201. Доказать, что в произвольном четырёхугольнике ABCD расстояние между серединами противоположных сторон AB и CD не превосходит полусуммы (BC + AD)/2, и что это неравенство обращается в равенство только для трапеций.

179



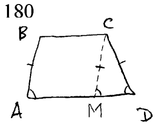
▷ Проведём диагональ AC. Пусть M — её середина. Точка M вместе с серединами сторон AB и CD образует треугольник, одна сторона которого равна половине основания BC (как средняя линия), другая — половине основания AD, а третья — расстояние, о котором идёт речь в задаче. Остаётся воспользоваться неравенством треугольника.

Неравенство треугольника обращается в равенство, если три точки лежат на прямой — но тогда эта прямая будет параллельной и AC, и BD (средняя линия треугольника параллельна основанию), так что в этом случае ABCD будет трапецией. ◁

Трапецию, в которой боковые стороны равны, называют *равнобочной*.

202. Доказать, что в равнобочной трапеции углы при основании равны.

180



▷ Проведём через вершину C трапеции ABCD прямую, параллельную боковой стороне AB. Она разрежет трапецию на параллелограмм ABCM и треугольник CDM. При этом CM будет равно AB, а угол CMD будут равен углу A трапеции. Если трапеция равнобочная, то треугольник CMD — равнобедренный и углы при его основании равны. Значит, и углы при основании трапеции равны. ◁

203. Доказать, что если в трапеции углы при основании равны, то она равнобочная.

▷ Задача решается с помощью того же дополнительного построения, что и предыдущая: надо только воспользоваться тем, что против равных углов в треугольнике лежат равные стороны. ◁

Ещё несколько задач

204. В трапеции $ABCD$ на боковых сторонах выбраны точки E и F, делящие их в отношении $2:1$ (так что $AE:EB = DF:FC = 2:1$). Доказать, что отрезок EF параллелен основаниям трапеции.

205. (Продолжение) Найти его длину, если $AD = a$, $BC = b$.

Простейшие неравенства

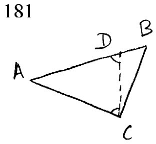
206. Доказать, что в треугольнике внешний угол всегда больше внутреннего, с ним не смежного.

▷ В самом деле, внешний угол треугольника равен сумме двух не смежных с ним внутренних углов. ◁

207. Доказать, что в треугольнике против большей стороны лежит больший угол. (Другими словами, если в треугольнике ABC сторона AB длиннее стороны AC, то угол C больше угла B.)

▷ Отложим на стороне AB отрезок AD, равный AC. В равнобедренном треугольнике ACD углы при основании равны. Остаётся заметить, что эти равные углы меньше угла ACB (угол ACD составляет его часть), но больше угла ABC (в треугольнике BCD угол B внутренний, а угол ADC — внешний, см. предыдущую задачу). ◁

181



208. Доказать, что в треугольнике против большего угла лежит большая сторона. (Другими словами, если в треугольнике ABC угол C больше угла B, то AB длиннее AC.)

▷ По существу, эта задача уже решена. Мы знаем, что против большей стороны лежит больший угол, и что против равных сторон лежат равные углы. Сравним стороны AB и AC. Могут ли они быть равны? Не могут, так как тогда углы B и C были бы равны. Может ли сторона AC быть длиннее AB? Не может, так как тогда лежащий против неё угол B был бы больше угла C. Остаётся единственная возможность: сторона AB длиннее стороны AC.

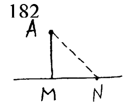
Такой способ рассуждения математики называют *доказательством от противного.* ◁

209. Доказать, что в прямоугольном треугольнике самой длинной стороной является гипотенуза, а в тупоугольном — сторона, противолежащая тупому углу.

▷ Прямой (и тем более тупой) угол будет больше других углов треугольника, так как сумма трёх углов равна $180°$. ◁

210. Дана прямая l и не лежащая на ней точка A. Доказать, что перпендикуляр, опущенный из точки на прямую — кратчайшее расстояние от точки A до точек, лежащих на прямой l.

182



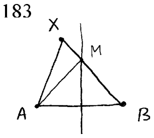
▷ Нам надо сравнить перпендикуляр AM с расстоянием AN от точки A до какой-то другой точки N на прямой l. Но мы уже знаем, что в прямоугольном треугольнике AMN гипотенуза AN длиннее катета AM. ◁

Утверждение предыдущей задачи иногда формулируют так: *перпендикуляр короче наклонной.*

211. Прямая l является серединным перпендикуляром к отрезку AB. Доказать, что точки, находящиеся с одной стороны от этой прямой, ближе к A, чем к B, а с другой стороны — наоборот.

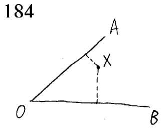
▷ Мы уже видели, что точки на самом серединном перпендикуляре одинаково удалены от A и от B. Рассмотрим теперь точку X, находящуюся по ту же сторону, что и точка A, соединим её с A и B отрезками и покажем, что $XA < XB$. Отрезок XB пересекает серединный перпендикуляр в некоторой точке M, которая находится на равном расстоянии от A и B: отрезки MA и MB равны. Теперь заметим, что $XB = XM + MB = XM + MA$, а по неравенству треугольника последняя сумма больше XA. Что и требовалось доказать. ◁

183



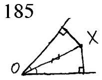
Таким образом, если в пустыне есть два колодца A и B, то с одной стороны серединного перпендикуляра живут люди, которым ближе колодец A, а с другой — которым ближе колодец B.

184



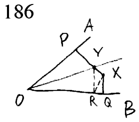
212. Дан угол AOB и точка X внутри него. Опустим из X перпендикуляры на стороны угла. Какой из них длиннее? Ответ определяется тем, с какой стороны от биссектрисы угла находится точка X. Доказать, что если X лежит на биссектрисе, то перпендикуляры равны; если X лежит с той же стороны биссектрисы, что и сторона OA, то короче перпендикуляр, опущенный на OA; если X лежит с той же стороны биссектрисы, что и сторона OB, то короче перпендикуляр, опущенный на OB.

185



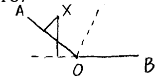
▷ Опустим из точки X перпендикуляры XP и XQ на стороны OA и OB данного угла. Если X лежит на биссектрисе угла, то прямоугольные треугольники OXP и OXQ равны по гипотенузе и острому углу.

186



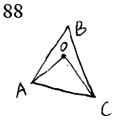
Пусть теперь X не лежит на биссектрисе и, скажем, лежит с той же стороны от неё, что сторона OB. Пусть Y — точка пересечения перпендикуляра XP с биссектрисой. Тогда отрезок YP равен перпендикуляру YR, опущенному из Y на OA. Тогда XP равно $XY+YR$, что больше XR по неравенству треугольника. В свою очередь XR больше XQ, так как перпендикуляр короче наклонной. Что и требовалось доказать. ◁

187



На самом деле в решении не рассмотрен случай, когда угол тупой и один из перпендикуляров падает не на сторону угла, а на её продолжение, как на рисунке. Но в этом случае этот перпендикуляр пересекает другую сторону угла и потому заведомо длиннее, чем другой (который является кратчайшим расстоянием до этой стороны).

188

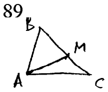


213. Точка O находится внутри треугольника ABC. Доказать, что сторона BC видна из неё под большим углом, чем из точки A.

▷ Сравним треугольники ABC и AOC. Углы A и C второго треугольника меньше соответствующих углов первого. Поскольку сумма углов в обоих треугольниках одна и та же, то угол O в треугольнике AOC будет больше угла B в треугольнике ABC. ◁

Ещё несколько задач

189



214. Точка M лежит на стороне BC треугольника ABC. Доказать, что отрезок AM короче хотя бы одной из сторон AB и AC.

⟨ Один из углов AMB и AMC — тупой. ⟩

215. На двух сторонах треугольника взято по точке. Доказать, что расстояние между этими точками не превосходит самой длинной стороны треугольника.

⟨ Дважды воспользоваться предыдущей задачей. ⟩

216. Доказать, что расстояние между любыми двумя точками внутри треугольника не превосходит самой длинной стороны треугольника.

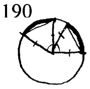
⟨ Воспользоваться предыдущей задачей. ⟩

Углы в окружности

Если разрезать окружность в каких-то двух точках A и B, то она распадётся на две *дуги*. И ту, и другую называют «дуга AB» (если из контекста не ясно, какая из двух дуг имеется в виду, то выбирают точку C на дуге и говорят «дуга ACB»).

Соединяя центр окружности с концами дуги, получаем *центральный угол*, ей соответствующий. Величину этого угла называют *величиной дуги*.

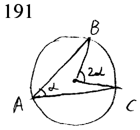
217. Доказать, что если две дуги одной окружности имеют равные величины, то стягивающие их хорды равны.

190


▷ Соединив концы хорд с центром окружности, получим два треугольника, которые равны по двум сторонам (радиусам) и углу между ними. ◁

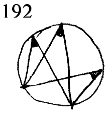
218. Окружность разбита пятью точками на пять дуг одинаковой величины. Найти величину каждой из них.

▷ На все дуги вместе приходится 360°, поэтому каждая из них равна $360°/5 = 72°$. ◁

191


(Теорема о вписанном угле) Пусть A, B и C — точки окружности с центром O. Тогда угол BAC равен половине величины дуги BC, то есть половине угла BOC.

Угол BAC называют *вписанным углом, опирающимся на дугу* BC. Тогда можно сказать так: *вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается*.

192


219. Вывести из теоремы о вписанном угле, что все отмеченные на рисунке углы (опирающиеся на одну и ту же дугу) равны.

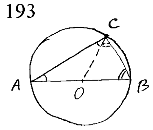
▷ Все они равны половине соответствующего центрального угла. ◁

В следующих двух задачах разбираются частные случаи теоремы о вписанном угле, когда одна из сторон треугольника ABC является диаметром окружности.

220. Если AB — диаметр окружности, а C — произвольная её точка, то угол ACB — прямой. (a) Вывести это утверждение из теоремы о вписанном угле. (b) Доказать его, не ссылаясь на эту теорему.

▷ (a) Угол ACB опирается на дугу, состовляющую половину окружности. Соответствующий центральный угол будет развёрнутым, и его величина равна 180°. Поэтому вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен половине от 180°, то есть 90°.

193

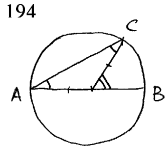


(b) Соединим точку C с центром O окружности (который является серединой диаметра AB). Получатся два равнобедренных треугольника AOC и COB. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны, поэтому угол ACB (равный $\angle ACO + \angle OCB$) равен сумме углов A и B треугольника ABC. А если в треугольнике один угол равен сумме двух других, то он прямой (так как сумма углов треугольника равна 180°). ◁

221. Если AB — диаметр окружности с центром в O, а C — произвольная точка окружности, то угол COB вдвое больше угла CAB. (a) Вывести это утверждение из теоремы о вписанном угле. (b) Доказать его, не ссылаясь на эту теорему.

▷ (a) В самом деле, согласно этой теореме угол $\angle CAB$ равен половине величины дуги BC, то есть половине соответствующего ей центрального угла COB

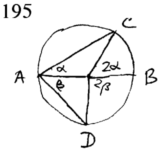
194



(b) Треугольник AOC — равнобедренный, поэтому углы при его основании равны. Значит, его внешний угол COB (равный сумме двух равных углов) вдвое больше каждого из них. ◁

Решив предыдущую задачу, мы тем самым доказали теорему о вписанном угле для случая, когда одна из сторон этого угла является диаметром. Оказывается, общий случай легко сводится к этому частному. Пусть $\angle CAD$ — произвольный вписанный угол. Проведём через его вершину диаметр. Этот диаметр разделит угол и соответствующую ему дугу на две части. Каждая из частей угла имеет своей стороной диаметр, и потому (по предыдущей задаче) равна половине дуги, на

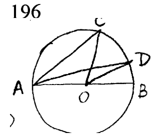
195



которую опирается. Значит, и весь угол равен половине дуги, на которую опирается. Теорема о вписанном угле доказана.

Внимательный читатель заметил, вероятно, что мы не рассмотрели случай, когда стороны вписанного угла лежат по одну сторону от диаметра, проведённого через его вершину (см. рисунок). Этот случай рассматривается, аналогично, только надо не складывать углы, а вычитать:

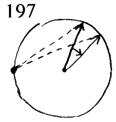
196



$$\angle CAD = \angle CAB - \angle DAB = \frac{1}{2}\angle COB - \frac{1}{2}\angle DOB =$$

$$= \frac{1}{2}(\angle COB - \angle DOB) = \frac{1}{2}\angle COD$$

197



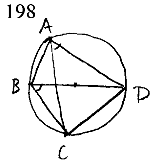
222. Минутная стрелка часов движется по окружности циферблата. Паук смотрит на её конец из точки, лежащей на той же окружности. На какой угол поворачивается конец стрелки за минуту с его точки зрения?

▷ За минуту стрелка проходит дугу в $360/60 = 6°$ градусов. Вписанный угол, опирающийся на эту дугу, равен $6/2 = 3°$. Поэтому с точки зрения паука конец стрели смещается на $3°$ за минуту. Другими словами, равномерное движение точки по окружности остаётся равномерным, если смотреть не из центра, а из какой-то точки окружности, только угловая скорость вдвое меньше. ◁

Если углы, большие $180°$, не рассматривать, то формулировка теоремы о вписанном угле становится более сложной: *если вписанный угол острый, то он равен половине угла между радиусами, а если тупой, то дополняет её до* $180°$.

223. В четырёхугольнике $ABCD$ два противоположных угла A и C прямые. Доказать, что угол BAC равен углу BDC.

198

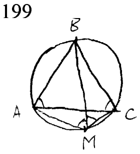


▷ Диагональ BD разрезает четырёхугольник на два прямоугольных треугольника. Построим окружность, у которой эта диагональ будет диаметром. Эта окружность пройдет через вершины четырёхугольника (вспомним, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине). Остаётся применить теорему о вписанном угле. ◁

224. Вершины равностороннего треугольника лежат на окружности. Доказать, что из любой точки окружности одна из сторон треугольника видна под углом 120°, а две другие — под углом 60°.

▷ Все углы равностороннего треугольника равны 60°, поэтому дуги, на которые они опираются, равны 120°. Поэтому углы AMB и BMC на рисунке также равны 60°, а AMC равен 120°. ◁

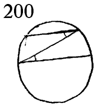
199



225. Если две хорды одной окружности параллельны, то заключённые между ними дуги равны по величине.

▷ Соединим противоположные концы хорд отрезком, получим два равных накрест лежащих угла. Значит, дуги окружности, на которые они опираются, равны. ◁

200



226. Доказать, что если окружность проходит через все четыре вершины трапеции, то боковые стороны трапеции равны (трапеция равнобочная).

▷ По предыдущей задаче дуги, заключённые между основаниями трапеции, равны. Следовательно (задача 217), стягивающие их хорды, то есть боковые стороны трапеции, равны. ◁

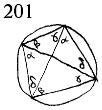
227. Вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Доказать, что сумма двух его противоположных углов (A и C, а также B и D) равна 180°.

▷ Эти противоположные углы описаются на взаимно дополнительные дуги, составляющие вместе целую окружность, то есть 360°. Значит, сумма углов равна половине от 360°, то есть 180°. ◁

228. Вершины четырёхугольника $ABCD$ лежат на окружности. Проведены диагонали AC и BD. Укажите на рисунке четыре пары равных углов, вершины которых лежат на окружности.

▷ См. рисунок, где одинаково обозначены равные углы, опирающиеся на общую дугу. ◁

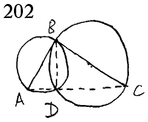
201



229. Отрезки AB и BC — диаметры двух окружностей, пересекающихся в двух точках (одна из которых B). Доказать, что другая точка пересечения лежит на прямой AC.

▷ Пусть D — другая точка пересечения. Угол BDA опирается на диаметр окружности и потому прямой. Аналогичным образом угол BDC — прямой. Значит, отрезки AD и DC составляют развёрнутый угол, то есть продолжают друг друга, то есть точка D лежит на прямой AC. ◁

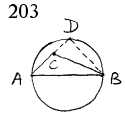
202



230. Мы видели, что из любой точки окружности её диаметр виден под прямым углом. Доказать, что из точек внутри окружности он виден под тупым углом, а из точек вне окружности — под острым.

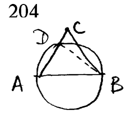
▷ Пусть AB — диаметр, а C — точка внутри окружности. Докажем, что угол ACB тупой. Продолжим AC до пересечения с окружностью в точке D. Угол ADB будет прямым, а угол C будет внешним углом прямоугольного треугольника, смежным к его острому углу, и потому тупым.

203



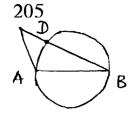
Если же C лежит вне окружности, и отрезок AC пересекает окружность в точке D, то угол ADB будет прямым, а угол C будет острым углом прямоугольного треугольника CDB.

204



Может случиться, правда, что AC не пересекает окружность вовсе, но тогда надо поменять ролями точки B и рассмотреть точку пересечения отрезка BC с окружностью. ◁

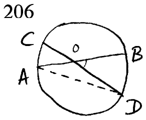
205



231. Доказать, что угол α между двумя пересекающимися хордами AB и CD равен полусумме дуг AB и CD (заключённых внутри этого угла и вертикального к нему).

▷ Обозначим через O точку пересечения хорд. Проведём хорду AC. Интересующий нас угол является внешним углом треугольника AOD и потому равен сумме

206

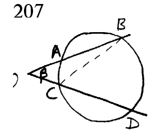


двух не смежных с ним углов этого треугольника. Оба этих угла — вписанные, один равен половине дуги AB, а другой — половине дуги CD. ◁

232. Угол β между продолжениями двух непересекающихся хорд AB и CD равен половине разности величин дуг AB и CD.

▷ Обозначим через O точку пересечения продолжений хорд. Проведём хорду BC. В треугольнике OBC сумма угла β и вписанного угла ABC равна внешнему углу BCD, поэтому угол β равен разноти этих двух углов, то есть полуразности соответствующих дуг. ◁

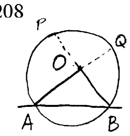
207



233. Прямая пересекает окружность в точках A и B и делит круг на две части (называемые *сегментами*). Рассмотрим один из них, ограниченный хордой AB и дугой окружности. Теорема о вписанном угле говорит, что из всех точек этой дуги хорда AB видна под одним и тем же углом. Доказать, что из всех внутренних точек сегмента хорда AB видна под бóльшим углом, а из точек, лежащих вне окружности (но с той же стороны от прямой) — под меньшим.

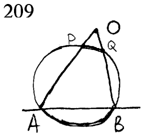
▷ Для прямого угла мы эту задачу уже решали, и сейчас мы будем действовать тем же способом, только для краткости сошлёмся на две предыдущие задачи. Нам нужно доказать, что угол AOB больше половины дуги AB (имеется виду дуга, лежащая с другой стороны от прямой). В самом деле, по задаче 231 этот угол равен полусумме дуги AB и дуги PQ на рисунке.

208

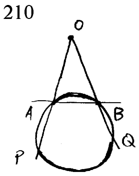


Аналогичным образом, если точка O лежит вне сегмента, то угол AOB равен полуразности дуг AB и PQ (задача 232) и потому меньше половины дуги AB. ◁

209



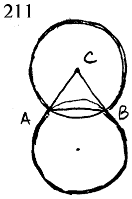
210



На самом деле возможно и другие случаи расположения точки O вне сегмента, но во всех случаях угол AOB оказывается меньше половины интересующей нас дуги. Например, в показанном на рисунке случае угол AOB равен полуразности PQ и верхней из двух дуг с концами A и B, и уменьшаемое (дуга PQ) меньше дуги APQB.

234. Даны две точки A и B. Нарисовать, где находятся точки C, из которых отрезок AB виден под углом 30°.

211



▷ Построим правильный треугольник ABC со стороной AB и окружность с центром в точке C, проходящую через точки A и B. Дуга AB этой окружности видна из центра под углом 60°, и потому из точек окружности (лежащих по ту же сторону от AB, что и точка C) отрезок виден под углом 30°. То же относится и к симметричной дуге окружности по другую сторону от AB. Получаем фигуру из двух дуг окружностей, из любой точки которой отрезок AB виден под углом 30°. Как показывает предвдущая задача, из точек внутри этой фигуры отрезок AB виден под бóльшим углом, а из точек вне её — под меньшим. ◁

Ещё несколько задач

235. Вершины треугольника лежат на окружности, радиус которой равен одной из сторон треугольника. Каким может быть угол треугольника, противолежащий этой стороне? (Есть две возможности.)

236. Даны две точки A и B. Нарисовать, где может находиться точка C, если известно, треугольник ABC прямоугольный (но не сказано, какой именно из его углов прямой).

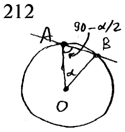
237. Величина дуги AB равна α. Найти угол BAO, если O — центр окружности.

238. На сторонах выпуклого четырёхугольника как на диаметрах построены полуокружности, обращённые внутрь четырёхугольника. Доказать, что они покрывают весь четырёхугольник.

⟨ Если какая-то точка останется непокрытой, то каждая сторона четырёхугольника будет видна из неё под острым углом. ⟩

Касательные

212

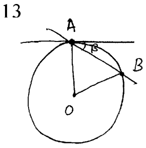


Пусть A — точка окружности, OA — ведущий в неё радиус. Возьмём на окружности другую точку B. Если величина дуги AB равна α, то угол OAB равен $90-\frac{\alpha}{2}$. Когда дуга AB стягивается в точку, угол α стремится к нулю, угол OAB становится прямым, а секущая AB превращается в касательную.

Касательной к окружности называют прямую, проведённую через какую-либо точку окружности (называемую *точкой касания*) перпендикулярно к её радиусу.

239. Касательную к окружности повернули на угол β вокруг точки касания, отчего она стала секущей. Найти величину дуги, которую она отсекает.

213

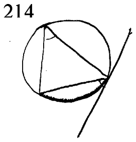


▷ Пусть OA — радиус, проведённый в точку касания, AB — секущая. Касательная перпендикулярна радиусу, поэтому угол OAB между радиусом и секущей равен $90\circ-\beta$. Треугольник OAB равнобедренный, поэтому второй угол в нём также равен $90^\circ-\beta$, а третий угол (с вершиной в центре окружности) равен 2β. Таким образом, повёрнутая на угол β касательная отсекает дугу величины 2β. ◁

Утверждение предыдущей задачи можно сформулировать так: угол между касательной и хордой, выходящей из точки касания, равен половине дуги, отсекаемой хордой.

240. Нарисована окружность, треугольник с вершинами на этой окружности, и прямая, касающаяся окружности в одной из вершин треугольника. Найти две пары равных углов.

214



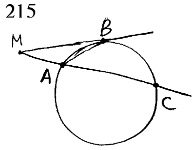
▷ См. рисунок: оба отмеченных угла равны половине отмеченной дуги. Аналогично находи ещё одну пару равных углов. ◁

241. Прямая касается окружности. Доказать, что точка касания — ближайшая к центру окружности точка прямой.

▷ Эта задачу мы по существу уже решали (перпендикуляр короче наклонной). ◁

242. Доказать, что угол BMA между касательной MB и секущей MAC равен половине разности дуг BC и AC.

215

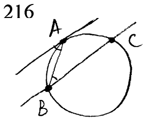


▷ В треугольнике MBA угол M равен разности внешнего угла BAC (который есть половина дуги BC, так как не неё опирается) и угла MBA (который есть угол между касательной и хордой и равен половине дуги AB). ◁

Эта задача является предельным случаем задачи 232, если условно считать, что касательная есть секущая, пересекающая окружность в двух бесконечно близких точках.

243. Касательная к окружности в точке A и хорда BC параллельны. Доказать, что дуги AB и BC равны.

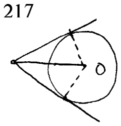
216



▷ Соединим точку касания с одним из концов хорды, например, с B. Тогда внутренние накрест лежащие углы (отмеченные на рисунке) будут равны. Один из них равен половине дуги AC (как вписанный угол, на неё опирающийся), а другой равен половине дуги AB (как угол между касательной и хордой). ◁

244. Из точки A проведены две касательные к окружности. Доказать, что их отрезки от точки A до точек касания равны.

217

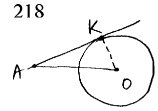


▷ Соединим центр окружности с точками касания. Получится два прямоугольных треугольника, в которых гипотенуза общая, а катеты равны (как радиусы окружности). Поэтому и другие катеты, то есть интересующие нас отрезки, тоже равны. ◁

245. Дана окружности и точка в не неё. Провести через точку касательную к окружности, пользуясь циркулем и линейкой.

▷ Первая реакция любого нормального человека: а зачем нам, собственно, циркуль?! Приложим линейку так, чтобы она проходила через заданную точку и касалась заданной окружности — вот и всё!

Тем не менее мы обязаны ограничиваться разрешёнными операциями с циркулем и линейкой: прямую можно проводить через две уже построенные точки, поэтому сначала надо построить точку касания. Покажем, как это сделать (мы приведём два разных способа) 218



Первый способ. Предположим, что прямая уже построена и соединим точку касания K с центром окружности O (см. рисунок). Получится прямоугольный треугольник AOK (угол K прямой, так как радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной). В этом треугольнике нам известны гипотенуза и катет OK (заранее, до построения касательной). Поэтому мы можем построить в сторонке треугольник, равный AOK, и тем самым найти расстояние AK. Остаётся провести окружность с центром в A и радиусом AK — она пересечёт заданную окружность как раз в точках касания.

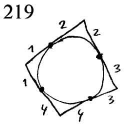
Другой способ состоит в следующем: так как треугольник AKO прямоугольный, то точка K лежит на окружности, построенной на AO как на диаметре. Остаётся пересечь эту окружность с заданной. ◁

246. Даны две точки. Построить прямую, проходящую через первую точку и отстоящую от второй точки на заданное расстояние.

▷ Эта задача по существу является переформулировкой задачи о построении касательной. Ведь сказать «прямая l отстоит из точки A на расстояние r» — это всё равно что сказать «прямая l касается окружности с центром в A радиуса r». ◁

247. Четыре касательные к окружности образуют четырёхугольник. Доказать, что суммы его противоположных сторон равны.

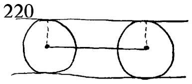
▷ Воспользовавшись предыдущей задачей, можно найти на рисунке четыре пары равных отрезков. Теперь 219



видно, что сумма двух противоположных сторон (любой пары) включает в себя все эти четыре отрезка по одному разу. ◁

248. Две прямые касаются двух окружностей равного радиуса. Доказать, что прямые параллельны друг другу и линии центров (прямой, проходящей через центры окружностей).

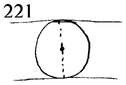
220



▷ Докажем, что общая касательная параллельна линии центров. Соединим центры с точками касания. Полученные отрезки будут равны (как радиусы равных окружностей) и параллельны (как перпендикуляры к общей касательной). Значит, они являются противоположными сторонами параллелограмма (и даже прямоугольника), и две другие его стороны тоже параллельны. ◁

249. Две параллельные прямые касаются двух окружностей. Доказать, что радиусы окружностей равны.

221



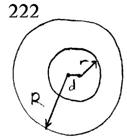
▷ Докажем, что радиус окружности, касающейся двух параллельных прямых, равен половине расстояния между ними (определяемого, напомним, как длина общего перпендикуляра). В самом деле, отрезки, соединяющие центр окружности с точками касания, продолжают друг друга (как перпендикуляры к параллельным прямым) и соединяются в общий перпендикуляр к двум прямым, являющийся диаметром окружности. ◁

Ещё несколько задач

250. Шесть касательных к окружности образуют шестиугольник со сторонами (в порядке обхода по часовой стрелке) a, b, c, d, e, f. Как найти f, если известны a, b, c, d, e?

Две окружности

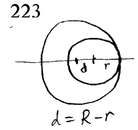
222



251. Даны две концентрические окружности радиусов r и R (считаем, что $r < R$). Меньшую окружность начинают двигать, увеличивая расстояние d между центрами окружностей. При каком значении d она коснётся большей окружности? Сколько точек пересечения будет у окружностей после этого? Когда они вновь перестанут пересекаться?

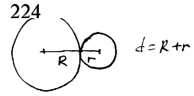
▷ Удобно провести линию центров — прямую, проходящую через центры окружностей, и считать, что большая окружность неподвижна, а центр меньшей движется по этой прямой. Видно, что когда величина d достигнет разницы радиусов ($R - r$), меньшая окружность упрётся в большую и они будут иметь общую точку на линии центров. Эта точка будет единственной. (Если из рисунка это не ясно, можно рассуждать так. Пусть O — центр большей окружности, O' — центр меньшей. Если X — общая точка окружностей, не лежащая на линии центров, то в треугольнике $OO'X$ стороны равны R, r и $d = R - r$, и сторона R равна сумме двух других, что невозможно.)

223



Отодвигая меньшую окружность ещё, мы получим две точки пересечения (часть меньшей окружности находится внутри большей, часть — вне, и точки пересечения разделяют эти части). Так будет продолжаться, пока расстояние d не станет равно сумме радиусов — в этот момент обе точки сольются в одну, лежащую на линии центров (см. рисунок), после чего окружности разойдутся и больше не пересекутся. ◁

224

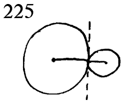


Ответ к этой задаче можно записать в виде таблицы (левая колонка — соотношение между d, R и r, правая — число общих точек).

$d < R - r$	0
$d = R - r$	1
$R - r < d < R + r$	2
$d = R + r$	1
$d > R + r$	0

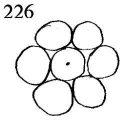
Когда две окружности имеют одну общую точку (строки 2 и 4 таблицы), говорят, что они *касаются* друг друга. Касание бывает *внутренним* (одна окружность внутри другой, строка 2) или *внешним* (строка 4).

225



Если две окружности касаются, то их единственная общая точка лежит на линии центров, и проведя через неё перпендикуляр к линии центров, мы получим прямую, которая касается обеих окружностей в этой точке.

226

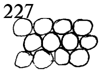


252. Дан круг. Начнём к нему прикладывать круги того же радиуса. Доказать, что поместится ровно 6 таких кругов (они будут касаться данного, а соседние — друг друга, см. рисунок).

▷ Обозначим через r радиус данного круга, а через O — его центр. Тогда центры касающихся его кругов будут лежать на окружности с центром O и радиусом 2r. Чтобы прикладываемые круги касались друг друга, надо, чтобы расстояние между их центрами также равнялось 2r. А такая задача у нас была: если шесть раз построить хорду, длина которой равна радиусу окружности, то цепочка замкнётся. (Напомним: две соседние точки образуют с центром равносторонний треугольник, поэтому отстоят по окружности ровно на 60°, то есть на шестую часть окружности.) ◁

Интересно, что аналогичная задача для шаров совсем не проста: великий Ньютон спорил со своим знакомым, можно ли приложить к шару 13 таких же шаров или можно только 12 — и только в нашем веке доказали, что 13 приложить нельзя.

227



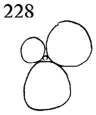
С помощью решённой нами задачи можно объяснить, как приложить 12 шаров. Мы видели, что к кругу можно приложить 6 кругов. К каждому из приложенных уже примыкают три круга, добавим еще три и так далее — получатся шестиугольные соты из кругов. Представим себе, что это не круги, а шары, уложенные на ровном столе (вид сверху). Тогда в луночки между соседними тремя кругами можно уложить такой же шар. Сделав это (не для всех луночек, а через одну), получим второй слой шаров. Он будет иметь такое же строение, что и первый (каждый шар второго слоя касается шести других), и на него можно уложить третий слой. Тогда каждый шар второго слоя касается трёх шаров первого, трёх шаров третьего и шести в своём слое, всего будет 12.

Впрочем, чтобы представить себе описанную укладку шаров, надо иметь хорошее воображение или большой запас шариков для подшипников (для настольного тенниса тоже годятся).

253. Нарисовать четыре окружности так, чтобы любые две из них касались друг друга внешним образом.

▷ См. рисунок ◁

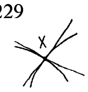
228



254. Нарисовать пять окружностей так, чтобы любые две из них касались друг друга.

▷ Эта задача — хорошая шутка, особенно если дать её после предыдущей: можно долго пытаться нарисовать эти окружности и так и этак, и ничего не будет получаться. Подвох тут в том, что не требуется, чтобы касание было внешним, и можно нарисовать сколько угодно окружностей, проходящих через одну точку и касающихся в ней. ◁

229

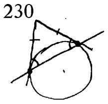


Пусть даны две окружности, пересекающиеся в точке X. Проведём через точку X касательные к окружностям. Угол между ними называют для краткости углом между окружностями. Аналогично определяется угол между окружностью и прямой.

255. Окружность пересекает прямую в двух точках. Доказать, что она образует равные углы с прямой в этих точках.

▷ Согласно определению, проведём две касательные в точках пересечения. Вместе с нашей прямой они образуют равнобедренный треугольник (отрезки касательных равны) и потому углы при его основании равны. ◁

230



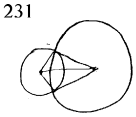
256. Две окружности пересекаются в точке под углом α. Найти угол между радиусами окружностей, проведёнными в точку пересечения

▷ Проведём две касательные. Вспоминая, что касательная перпендикулярна радиусу, видим, что искомый угол равен $180 - \alpha$. ◁

257. Две окружности пересекаются в двух точках. Доказать, что углы, под которыми они пересекаются в этих точках, равны.

▷ Проведём радиусы в точки пересечения, а также соединим центры окружностей отрезком. Получатся два равных треугольника (по трём сторонам). Поэтому углы между радиусами равны, и остаётся сослаться на предыдущую задачу. ◁

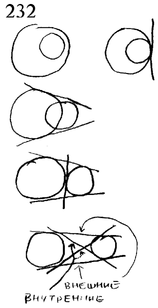
231



258. Даны две окружности. Мы хотим провести *общую касательную* — прямую, которая касается обеих окружностей. Сколько такх прямых существует? (Ответ зависит от соотношения радиусов окружностей и расстояния между их центрами.)

▷ Пусть радиусы окружностей равны r и R (считаем, что $r < R$), расстояние между их центрами равно d. Если $d < R - r$, то одна окружность лежит внутри другой и общих касательных нет (любая прямая, касающаяся внутренней окружности, пересекает внешнюю). При $d = R - r$ (внутреннее касание окружностей) есть ровно одна общая касательная (проходящая через точку касания окружностей). Если окружности пересекаются ($R - r < d < R + r$), есть ровно две общие касательные (см. рисунок). Раздвигая центры всё дальше, мы доходим до момента $d = R + r$, в этот момент появляется ещё одна общая касательная, проходящая через точку (внешнего) касания окружностей, и всего касательных будет три. Наконец, при $d > R + r$ имеется четыре касательных — две внешних и две внутренних. ◁

232



Общая касательная к двум окружностям бывает *внешней* (обе окружности лежат по одну сторону от касательной) или *внутренней* (окружности по разные стороны).

259. Имеются два круглых забора, огораживающих непересекающиеся круглые участки. Нарисовать точки, из которых виден только один из заборов (то есть второй его заслоняет).

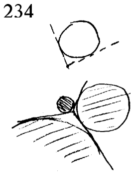
▷ Это — участки области между общими внешними касательными, расположенные вне кругов (если окружности разного размера, то один из них будет ограничен, а другой уходить в бесконечность). ◁

233

260. Можно ли нарисовать три непересекающихся (и не касающихся) круга и точку вне этих кругов, для которой круги закрывают весь горизонт (любой луч, выходящий из точки, упирается в один из кругов)? Можно ли сделать то же самое с двумя кругами?

▷ Каждый круг закрывает угол зрения, заключённый между двумя касательными (см. рисунок). Этот угол меньше 180°, поэтому два круга не могут закрыть весь горизонт (360°). А три уже могут (надо только подобрать расстояния от точки до кругов так, чтобы круги не пересекались, см. рисунок). ◁

234



261. Две точки A и B находятся на расстоянии 8. Сколькими существует прямых, которые находятся на расстоянии 5 от точки A и расстоянии 3 от точки B?

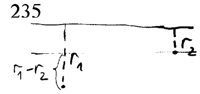
▷ Прямая l находится на расстоянии d от точки A, когда она касается окружности радиусом d с центром в A. Поэтому задачу можно переформулировать так: даны две окружности радиусов 3 и 5, расстояние между центрами равно 8. Сколько существует общих касательных?

Эту задачу мы уже решали; так как $3+5=8$, окружности касаются внешним образом и общих касательных будет три. ◁

262. Построить общую внешнюю касательную к двум данным окружностям (лежащим одна вне другой).

▷ Условие задачи можно перевести на язык расстояний: надо найти прямую, которая отстоит на данные

235



расстояния (радиусы r_1 и r_2, считаем, что $r_1 > r_2$) от двух данных точек (центры O_1 и O_2), причём обе точки должны лежать по одну сторону прямой (внешняя касательная).

Пусть такая прямая построена. Что будет, если сдвинуть её на расстояние x (параллельно самой себе)? Расстояния от обеих точек одновременно увеличатся или уменьшатся на x. Приблизим прямую к точкам, сдвинув её на расстояние r_2. Расстояние от точки O_1 до прямой станет равно $r_1 - r_2$, а расстояние от O_2 до прямой обратится в 0, то есть прямая будет проходить через точку O_2. Другими словами, сдвинутая прямая будет касательной к окружности радиуса $r_1 - r_2$ с центром в O_1, проходящей через точку O_2.

Теперь ясно, как построить общую касательную. Построим окружность радиуса $r_1 - r_2$ с центром в O_1. Проведём через точку O_2 касательную к этой окружности (это можно сделать двумя способами). Полученная прямая будет отстоять от точки O_1 на расстояние $r_1 - r_2$. Сдвинув её на расстояние r_2, получим прямую, которая отстоит на расстояние r_2 от точки O_2 и на расстояние $(r_1 - r_2) + r_2 = r_1$ от точки O_1. Эта прямая и будет общей внешней касательной к окружностям (одной из двух). $\triangleleft$

Ещё несколько задач

236

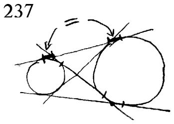
263. Несколько окружностей имеют общую точку и касаются друг друга в этой точке. Доказать, что можно провести отрезок, который пересекает все эти окружности в разных точках, но под одним и тем же углом (см. рисунок).

264. Две окружности пересекаются под прямым углом. Доказать, что можно построить третью окружность, которая проходит верез центры данных окружностей и через обе точки их пересечения.

265. Даны две точки A и B. Сколькими существует прямых, которые находятся на расстоянии 5 от точки A и расстоянии 3 от точки B, если расстояние AB равно 1? равно 2? равно 4? равно 6? равно 9?

266. Даны две окружности, лежашие одна вне другой. Как построить (циркулем и линейкой) общие внутренние касательные?

237



267. Две окружности лежат одна вне другой. Проведены четыре общие касательные (две внешние и две внутренние). Возьмём внешнюю касательную и отрезок на ней между точками касания. Этот отрезок делится внутренними касательными на три части. Доказать, что две крайние части равны.

Описанная окружность. Серединные перпендикуляры.

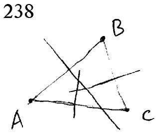
268. Даны две точки A и B. Рассмотрим всевозможные окружности, проходящие через точки Aи B. Где находятся их центры?

▷ Если окружность с центром O проходит через точки A и B, то расстояния OA и OB равны (являясь радиусами этой окружности). Как мы знаем, в этом случае точка O лежит на серединном перпендикуляре к AB.

Напротив, любая точка O серединного перпендикуляра равноудалена от A и B, и если провести окружность с центром в O и радиусом OA, то она пройдёт и через B.

Получается, что центры окружностей, проходящих через A и B, заполняют серединный перпендикуляр к отрезку AB. ◁

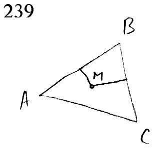
238



269. На рисунке изображены три колодца A, B, C. Серединный перпендикуляр ab отделяет тех, кому A ближе, чем B, от тех, кому B ближе, чем A. Аналогично для линий bc и ac. Какой колодец ближе всего для тех, кто живёт внутри маленького треугольника (заштрихованного на рисунке)?

▷ В задаче имеется подвох: если его не заметить, получится ерунда. Смотрите: для точек заштрихованного треугольника точка A ближе, чем B (они лежат по одну сторону с A от серединного перпендикуляра ab к отрезку AB). Аналогичным образом точка B ближе, чем точка C, а точка C ближе, чем точка A — так какая же из точек ближайшая? Разгадка в том, что заштрихованного треугольника вообще не существует — все три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке! ◁

239



270. Дан треугольник ABC. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекаются в точке M. Доказать, что серединный перпендикуляр к AC также проходит через M (так что три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке).

▷ Поскольку точка M лежит на серединном перпендикуляре к AB, она одинаково удалена от A и B. Поскольку M лежит на серединном перпендикуляре к BC, она одинаково удалена от B и C. Выходит, что она одинаково удалена от всех трёх точек A, B и C. Значит, она лежит на серединном перпендикуляре к AC, что и требовалось доказать. ◁

271. Дан треугольник. Как построить окружность, проходящую через его вершины?

▷ Другими словами, нам надо найти точку, находящуюся на одинаковом расстоянии от вершин треугольника (центр искомой окружности). Мы видели, что для этого надо построить серединные перпендикуляры к двум сторонам и найти точку их пересечения. (Эта точка окажется и на третьем серединном перпендикуляре.) ◁

Не может ли так случится, что серединные перпендикуляры не пересекутся? Если они параллельны, то две стороны, которым они перпендикулярны, составляют общий перпендикуляр к этим параллельным прямым, и потому продолжают друг друга, и треугольника не получается (вершины треугольника не могут лежать на одной прямой).

272. Могут ли две разные окружности пересекаться в трёх точках?

▷ Пусть две окружности имеют три общие точки A, B, и C. Тогда центр любой из них можно построить как пересечение серединных перпендикуляров к AB и к AC, то есть центры совпадают. А если у двух окружностей общий центр и они имеют общую точку, то у них одинаков и радиус. ◁

> Окружность, проходящую через вершины треугольника, называют *описанной* вокруг этого треугольника (а треугольник называют *вписанным* в окружность). Как мы видели, вокруг всякого треугольника можно описать единственную окружность.

273. Дана окружность, но центр её не указан. Восстановить этот центр при помощи циркуля и линейки.

▷ Мы уже знаем, как построить окружность, проходящую через данные три точки — при этом построении строится и её центр. Так что достаточно взять любые три точки окружности и выполнить это построение. ◁

274. Может ли радиус описанной около треугольника окружности быть больше 1 метра, если все стороны треугольника не превосходят 1 сантиметра?

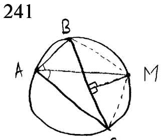
▷ Задачу легко решить, если переформулировать её так: можно ли вписать в окружность большого радиуса маленький треугольник? Конечно, можно: возьмём на ней три близкие точки и объявим их вершинами треугольника. ◁

240

275. Вершины треугольника ABC лежат на окружности. Биссектриса угла A пересекает окружность в точке M. Доказать, что точка M лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC.

▷ Биссектриса делит угол на два равных вписанных угла, которые, следовательно, опираются на равные дуги. Следовательно, хорды MB и MC равны. Поэтому точка M одинаково удалена от точек B и C, то есть лежит на серединном перпендикуляре к стороне BC. ◁

241



Утверждение этой задачи можно прочесть так: серединный перпендикуляр к стороне треугольника и биссектриса противолежащего ей угла пересекаются на описанной вокруг треугольника окружности.

Ещё несколько задач

276. Доказать, что для прямоугольного треугольника радиус описанной окружности вдвое меньше гипотенузы.

Вписанная окружность. Биссектрисы.

277. Дан угол. Где может находиться центр окружности, если эта окружность касается обеих сторон угла?

$\triangleright$ Если окружность касается прямой, то её радиус, проведённый в точку касания, является кратчайшим расстоянием до прямой. Значит, центр окружности, касающейся сторон угла, одинаково удалён от этих сторон, и потому лежит на биссектрисе угла. $\triangleleft$

278. В треугольнике ABC биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M. Доказать, что биссектриса угла C также проходит через точку M

$\triangleright$ Точки, лежащие на биссектрисе угла, одинаково удалены от его сторон. Значит, точка M одинаково удалена от сторон AB и AC (лёжа на биссектрисе угла A), а также от сторон AB и BC (лёжа на биссектрисе угла B). Поэтому она одинаково удалена от всех трёх сторон, и, следовательно, лежит и на биссектрисе угла C. $\triangleleft$

Таким образом, биссектрисы трёх углов треугольника пересекаются в одной точке.

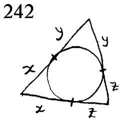
279. Дан треугольник. Построить окружность, лежащую внутри него и касающуюся всех трёх его сторон.

$\triangleright$ Центр этой окружности одинаково удалён от сторон треугольника (на расстояние, равное радиусу окружности) и потому лежит в точке пересечения биссектрис треугольника. Как строить биссектрисы, мы знаем. $\triangleleft$

Окружность, лежащая внутри треугольника и касающаяся трёх его сторон, называется *вписанной* в треугольник. (А про треугольник говорят, что он *описан* вокруг этой окружности.)

280. Окружность вписана в треугольник со сторонами a, b и c. Найти длины отрезков, на которые точки касания делят стороны этого треугольника.

▷ Здесь понадобится немного алгебры. Среди этих отрезков есть три пары равных. Обозначим их длины x, y и z. Получим систему уравнений:



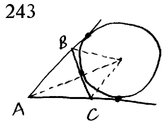
242

$$\begin{cases} x + y = a \\ x + z = b \\ y + z = c \end{cases}$$

Сложим все три уравнения: $2x + 2y + 2z = a + b + c$, откуда $x+y+z = (a+b+c)/2$. Вычитая из полученного равенства три данных, получаем, что $z = (b + c - a)/2$, $y = (a + c - b)/2$, $x = (a + b - c)/2$. ◁

281. Дан треугольник ABC. Построить окружность, касающуюся стороны BC и продолжений сторон AB и AC за точки B и C.

▷ Центр этой окружности лежит на биссектрисе угла A, а также на биссектрисах внешних углов треугольника с вершинами A и C, так что достаточно построить эти биссектрисы. ◁



243

Окружность, построенная в предыдущей задаче, называют *вневписанной* окружностью треугольника. Таких окружностей три.

Как мы видели, биссектрисы внутреннего и двух внешних углов треугольника пересекаются в одной точке — центре вневписанной окружности.

282. Две пересекающиеся прямые касаются двух окружностей. Доказать, что точка их пересечения лежит на прямой, соединяющей центры окружностей.

⟨ Если окружности лежат по одну сторону от точки пересечения, эта задача уже была разобрана. ⟩

283. Стороны треугольника равны a, b и c. Найти отрезки, на которые делит сторону c точка касания этой стороны с вневписанной окружностью.

284. На стороне треугольника отмечены две точки: точка касания со вписанной окружностью и точка касания с вневписанной окружностью. Они делят эту сторону на три отрезка. Доказать, что два из этих отрезков равны.

285. Биссектрисы всех четырёх углов четырёхугольника со сторонами a, b, c и d (перечисленными в порядке обхода) пересекаются в одной точке. Доказать, что $a + c = b + d$.

Вписанные и описанные четырёхугольники

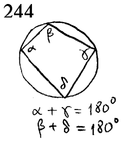
Вокруг любого треугольника можно описать окружность; в любой треугольник можно вписать окружность.

Для четырёхугольников это не так: для того, чтобы вокруг четырёхугольника можно было описать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных углов были равны 180°.

Для того, чтобы в четырёхугольник можно было вписать окружность, необходимо и достаточно, чтобы суммы противоположных сторон были равны друг другу.

Эти и родственные факты составляют содержание задач данного раздела.

244



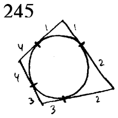
286. Доказать, что если вершины четырёхугольника лежат на окружности, то суммы углов противоположных сторон равны 180°.

▷ Эта задача уже обсуждалась: вписанный угол равен половине дуги, на которую он опирается; противоположные углы четырёхугольника опираются на дуги, составляющие в сумме полную окружность (360°). ◁

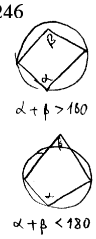
287. Доказать, что окружность касается всех четырёх сторон четырёхугольника, то суммы его противоположных сторон равны.

▷ Каждая сторона четырёхугольника делится точкой касания на две части; всего получается 8 отрезков. Среди этих отрезков есть четыре пары равных (два касательные к окружности, проведённые из одной точки, равны), и сумма противоположных сторон включает по одному отрезку из каждой пары. ◁

245



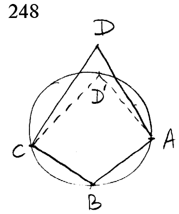
246



288. Окружность проходит через вершины A, B и C четырёхугольника ABCD. Доказать, что если точка D попадает внутрь окружности, то сумма углов B и D больше 180°, а сумма углов A и C меньше 180°. Доказать, что если точка D оказалась вне окружности, то сумма углов B и D меньше 180°, а сумма углов A и C меньше 180°.

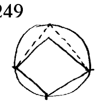
▷ Прежде всего заметим, что сумма всех четырёх углов равна 360°. Поэтому если сумма одной пары углов больше 180°, то сумма второй пары меньше, и наоборот.

248



Пусть точка D оказалась вне окружности. Что случится с углами четырёхугольника, если заменить её на точку D′ (лежащую на окружности и внутри четырёхугольника)? Угол B, естественно, не изменится. Что произойдёт с углом D, ясно не сразу, но вот углы A и C, как видно из рисунка, уменьшатся. (А следовательно, D увеличится, поскольку сумма всех углов неизменно равна 360°.) У нового четырёхугольника ABCD′ суммы противоположных углов равны 180°. Следовательно, у старого сумма углов A и D была меньше 180°, а сумма углов B и C была больше 180°.

249

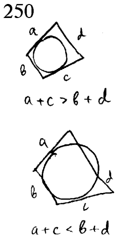


Совершенно так же можно рассуждать для случая, когда точка D оказалась внутри четырёхугольника. Надо только заменить её на точку D' на окружности так, чтобы углы A и C увеличились. (Годится любая точка окружности, попадающая внутрь угла, являющегося вертикальным к углу D.) ◁

289. Доказать, что если суммы противоположных углов четырёугольника равны 180°, то вокруг него можно описать окружность.

▷ Очевидное следствие предыдущей задачи: если мы проведём окружность через три его вершины, то четвёртая на неё попадёт. В самом деле, она не можнет быть ни внутри, ни вне окружности, поскольку в этом случае сумма протиывоположных углов будет меньше или больше 180°. ◁

250

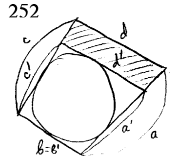


290. Выпуклый четырёхугольник имеет стороны a, b, c, и d (перечислены по часовой стрелке). Окружность касается сторон a, b и c. Доказать, что если сторона d не имеет общих точек с окружностью, то $a + c > b + d$. Доказать, что если сторона d пересекает окружность, то $a + c < b + d$.

▷ Эта задача решается чуть более сложно, чем предыдущая, но похожим способом.

Пусть сторона d не имеет общих точек с окружностью. Подвинем её в направлении центра так, чтобы она коснулась окружности. Как изменятся длины сторон? Стороны a и c, естественно, укоротятся. Обозначим их новые длины через a' и c'. Сторона b не изменится, так что её новая длина b' равна прежней длине b. Что произойдёт со стороной d? Это зависит от ситуации: новая длина (обозначим её d') может быть и меньше, и больше старой. Нас интересует соотношение между $a+c$ и $b+d$.

252



Мы знаем, что $a'+c' = b'+d'$, поэтому вместо сравнения $a+c$ и $b+d$ надо сравнивать приращения, то есть $(a + c) - (a' + c')$ и $(b + d) - (b' + d')$. Первое равно $(a - a') + (c - c')$, то есть сумма двух противоположных сторон заштрихованного четырёхугольника. Второе приращение равно $d-d'$ (поскольку $b = b'$), то есть разности двух других сторон захтрихованного четырёугольника.

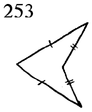
Осталось заменить, что для любого четырёхугольника разность двух его сторон меньше суммы двух других сторон. В самом деле, если p, q, r, s — его стороны, то $p-q < r+s$, поскольку $p < q+r+s$ («неравенство четырёхугольника»). Итак, второе приращение меньше первого, то есть $a + c > b + d$.

Вторая часть задачи (что будет, если d пересекает окружность) решается точно так же: надо отодвинуть сторону d так, чтобы она стала касаться окружности, и сравнить старый и новый четырёугольники. ◁

291. Доказать, что если в выпуклом четырёхугольнике суммы противоположных сторон равны, то в него можно вписать окружность.

▷ Следствие предыдущей задачи: впишем окружность так, чтобы она касалась трёх сторон. Тогда четвёртая сторона также обязана коснуться окружности: иначе по предыдущей задаче суммы противоположных сторон будут не равны. ◁

253



Условие выпуклости существенно: можно нарисовать невыпуклый четырёхугольник с двумя равными парами сторон. В нём суммы противоположных сторон, конечно, равны, но вписать в него окружность нельзя (даже трёх сторон одновременно она касаться не может).

292. Доказать, что вокруг выпуклого четырёхугольника $ABCD$ можно описать окружность в том и только том случае, когда сторона CD видна из точек A и B под одним и тем же углом.

▷ Если окружность описать можно, то углы, под которыми видна сторона CD из точек A и B, являются вписанными углами, опирающимися на одну дугу, и потому равны.

В обратную сторону: пусть эти углы равны. Проведём окружность через точки A, C и D. Тогда точка B попадёт на ту же окружность. В самом деле, из точек вне окружности отрезок CD виден под меньшим углом, чем из точек дуги CAD, а из точек внутри — под бо́льшим (задача 233). ◁

293. Доказать, что если в выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ сумма углов A и C равна $180°$, то сторона CD видна из точек A и B под одинаковыми углами.

▷ Это — очевидная комбинация предыдущих задач. Интересно то, что в такой формулировке нет ни слова о каких бы то ни было окружностях, а решение использует вспомогательную окружность. (Эту задачу можно также решить с помощью подобных треугольников, см. ниже.) ◁

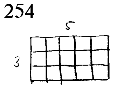
Площади

Площадь фигуры — неотрицательное число. Равные фигуры имеют равные площади. Если фигура разрезана на части, то её площадь равна сумме площадей частей. Площадь квадрата со стороной 1 считается единицей площади.

294. Найти площадь прямоугольника со сторонам 3 и 5.

▷ Такой прямоугольник можно разрезать на 15 единичных квадратов, поэтому его площадь равна сумме площадей этих квадратов, то есть 15. ◁

254



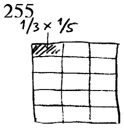
295. Сколько квадратных сантиметров в квадратном метре?

▷ Квадрат со стороной в 1 метр можно разбить на 100×100 квадратов со стороной 1 сантиметр, поэтому в одном квадратном метре помещается $100 \cdot 100 = 10\,000$ квадратных сантиметров. ◁

296. Найти площадь прямоугольника со сторонам $1/3$ и $1/5$.

▷ Если единичный квадрат разрезать на 3 части по горизонтали и 5 частей по вертикали, то каждая часть как раз и будет прямоугольником со сторонами $1/3$ и $1/5$. Всего частей 15, они равны, поэтому площадь каждой части будет $1/15$. ◁

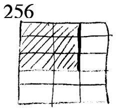
255



297. Найти площадь прямоугольника со сторонами $2/3$ и $3/5$.

▷ Такой прямоугольник составлен из 2×3 прямоугольников размера $1/3 \times 1/5$, поэтому его площадь равна $6/15 = (2/3) \cdot (3/5)$ ◁

256



Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна ab.

В предыдущей задаче мы по существу доказали это для случая, когда стороны прямоугольника рациональны (измеряются дробями с целыми числителями и знаменателями). Для общего случая это можно доказать, заключая прямоугольник между меньшим и большим прямоугольниками с рациональными сторонами.

298. Найти площадь прямоугольного треугольника, оба катета которого имеют длину 1.

▷ Диагональ разрезает единичный квадрат на два таких прямоугольника, поэтому площадь каждого из них равна $1/2$. ◁

257

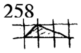
299. Найти площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны 3 и 5.

▷ Из двух таких треугольников можно составить прямоугольник 3×5, поэтому площадь каждого из них равна половине площади прямоугольника, то есть $3 \cdot 5/2$ ◁

Решение предыдущей задачи показывает, что площадь прямоугольного треугольника составляет половину произведения его катетов.

300. Найти площадь треугольника на клетчатой бумаге со стороной клетки 1 (см. рисунок)

258



▷ Его можно разрезать на две части, плозади которых равны $1 \cdot 1/2 = 1/2$ и $1 \cdot 2/2 = 1$. Общая площадь будет 1,5. ◁

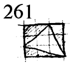
259

301. Та же задача для другого треугольника (см. рисунок)

260

▷ Этот треугольник не так легко разрезать на части известной площади. Зато его можно дополнить до квадрата 3×3 тремя прямоугольными треугольниками, площади которых мы искать умеем (они равны $2 \cdot 2/2 = 2$, $1 \cdot 3/2 = 1{,}5$ и $3 \cdot 1/2 = 1{,}5$). Ответ: площадь треугольника равна $9 - 2 - 1{,}5 - 1{,}5 = 4$. ◁

261



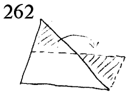
Две фигуры, имеющие равную площадь, называют *равновеликими*

Чтобы доказать, что две фигуры равновелики, можно разрезать одну из них на части, а затем сложить из частей другую фигуру.

302. Разрезать треугольник на две части, из которых можно сложить параллелограмм.

▷ Проведём через середины двух соседних сторон прямую, параллельную третьей стороне, и дополним трапецию до параллелограмма. Легко доказать, что выступающая часть треугольника равна недостающей (по стороне и двум углам). ◁

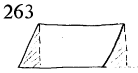
262



303. Разрезать параллелограмм на части, из которых можно составить прямоугольник.

▷ Положим параллелограм на горизонтальную прямую и опустим высоты из концов его верхнего основания. Видно, что если отрезать треугольник слева и приложить его справа, то как раз получится прямоугольник. (Эти

263

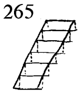


два прямоугольных треугольника — выступающий и недостающий — равны, например, по гипотенузе и острому углу.)

264

Впрочем, такой приём не всегда годится — может оказаться, что высота падает вовне основания (см. рисунок). Тогда можно положить параллелограмм другим боком: если сделать горизонтальной большую сторону параллелограмма, такого случится не может.

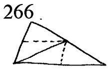
265



Есть и другой способ — можно разрезать параллелограмм на несколько слоёв, каждый переделать в прямоугольник и потом эту стопку прямоугольников сделать вертикальной. Получится один большой прямоугольник, у которого сторонами будут горизонтальная сторона параллелограмма и его высота. ◁

304. Медиана делит треугольник на два треугольника. Доказать, что эти треугольники равновелики, разрезав один из них на две части, из которых можно сложить второй.

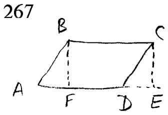
266



▷ Проведём две средние линии. Получатся два треугольника, равных как половинки параллелограмма, и два, которые равны по трём сторонам (каждая сторона вдвое меньше соответствующей стороны большого треугольника). ◁

305. Доказать, что площадь параллелограмма равна произведению его стороны на высоту, опущенную на эту сторону.

267

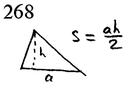


▷ Можно использовать решюннуё нами задачу и разрезать параллелограмм на части, из которых сложить прямоугольник. Но можно сделать и иначе. Если добавить к параллелограмму $ABCD$ треугольник CDE, (DE — высота, опущенная из точки D на основание AB, см. рисунок), получится трапеция $ABCE$. Та же самая трапеция получится, если добавить к прямоугольнику $BCEF$ (BF — высота) треугольник ABF. Прямоугольные треугольники ABF и CDE равны по гипотенузе и острому углу. Значит, и параллелограмм, и прямоугольник получаются вычитанием равных треугольников из трапеции, и потому имеют одинаковую площадь.

Этот приём проходит без изменения и в случае, когда высота падает вне основания параллелограмма. ◁

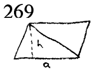
Приём, использованный в решении этой задачи, называют так: мы доказали, что параллелограмм и прямоугольник *равновелики по дополнению* (получаются из равных фигур отрезанием равных частей, но в разных местах).

268



306. Доказать, что площадь треугольника равна половине произведения основания на высоту, опущенную на это основание.

269

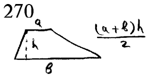


▷ В самом деле, два таких треугольника образуют параллелограмм, площадь которого равна произведению основания на высоту. ◁

307. Используя предыдущую задачу, доказать, что медиана делит треугольник на две половины равной площади.

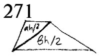
▷ В самом деле, у этих половин одинаковые основания и общая высота. ◁

270



308. Доказать, что площадь трапеции равна произведению её высоты на полусумму оснований.

271



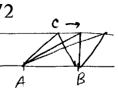
▷ Разрежем трапецию диагональю на два треугольника. Площадь каждого из них равна половине произведения высоты трапеции на одно из оснований, остаётся сложить эти равенства. ◁

309. В треугольнике одна сторона вдвое длиннее другой. Доказать, что одна из высот треугольника вдвое короче другой.

▷ Формулу для площади треугольника можно применять к разным сторонам, и площадь должна получиться одной и той же. Значит, раз одна сторона вдвое длиннее другой, а произведение стороны и высоты одно и то же, то одна из высот вдвое короче другой. ◁

То же рассуждение показывает, что высоты треугольника обратно пропорциональны опущенным на них сторонам.

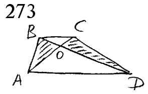
272



310. На одной из двух параллельных прямых взят неподвижный отрезок AB. а по другой перемещается точка C. Доказать, что площадь треугольника ABC остаётся неизменной.

▷ В самом деле, если опускать из точки C высоту на прямую AB, то её длина не зависит от положения точки C. ◁

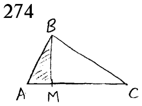
273



311. В трапеции ABCD (основания AD и BC) диагонали пересекаются в точке O. Доказать, что треугольники AOB и COD имеют равную площадь.

▷ Это становится ясным, если к обоим треугольникам добавить треугольник AOD — получатся два треугольника ABD и ACD, которые имеют общее основание AB и равные высоты, опущенные на это основание. ◁

274

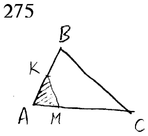


312. В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M, делящяя её в отношении $AM : MC = 1 : 3$. Найти площадь треугольника ABM, если площадь треугольника ABC равна 1.

▷ В треугольниках ABC и ABM есть общая высота, опущенная из точки B, а стороны AB и AM, на которые она опущена, отличаются в три раза. Поэтому площадь треугольника ABM равна $1/3$. ◁

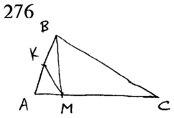
То же рассуждение показывает, что если одну сторону треугольника увеличить или уменьшить в k раз, оставив другую сторону и угол между сторонами неизменным, то плозадь треугольника увеличится или уменьшится в те же k раз

275



313. В треугольнике ABC середина K стороны AB соединена с точкой M, делящей сторону AC в отношении $AM : MC = 1 : 3$. Найти площадь треугольника AKM, если площадь треугольника ABC равна 1.

276



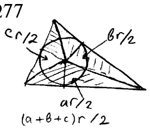
▷ Сравним оба треугольника с промежуточным треугольником ABM. Сначала мы уменьшаем сторону AC в три раза до AM, получаем треугольник ABM. Как мы видели, площадь при этом также уменьшается в три раза. Затем мы уменьшаем сторону AB вдвое до AK, площадь уменьшается ещё в два раза. Получаем ответ: $1/6$. ◁

Это рассуждение показывает, что если мы меняем две стороны треугольника, оставляя угол между ними неизменным, то площадь меняется пропорционально произведению этих двух сторон.

314. Окружность радиуса r вписана в треугольник периметра p и площади S. Как связаны эти три величины?

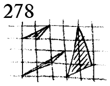
▷ Соединив центр окружности с вершинами треугольника, получим три треугольника, каждый из которых имеет высоту r, опущенную на одну из сторон треугольника. Площади этих трёх частей равны половине произведения r на стороны треугольника. Складывая, получаем, что $S = rp/2$ ◁

277



Ещё несколько задач

278



315. Найти площади треугольников на рисунке.

316. Может ли площадь треугольника с вершинами в узлах квадратной сетки со стороной 1 быть равна $1/3$?

317. Можно ли нарисовать треугольник с вершинами в узлах квадратной сетки со стороной 1, если требуется, чтобы все его стороны были длиннее 4, а площадь меньше 1?

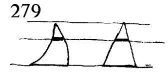
318. Разрезать параллелограмм на части, из которых можно сложить 5 равных параллелограммов.

⟨ Соединить каждую вершину с серединой стороны, идущей через одну сторону от этой вершины. ⟩

319. Могут три высоты треугольника иметь длины $1/2$, $1/3$ и $1/6$?

320. Принципом Кавальери называют следующее утверждение: если две фигуры на плоскости таковы, что любая горизонтальная прямая пересекает их по равным отрезкам, то эти фигуры имеют равную площадь. Какие из разобранных нами задач можно решить с помощью этого принципа?

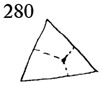
279



321. Дан треугольник ABC. Для каких точек M внутри него треугольники ABM и ACM будут равновелики? Как найти такую точку M, чтобы все три треугольника ABM, ACM и BCM были бы равновелики? Как получить новое доказательство того, что три медианы треугольника пересекаются в одной точке?

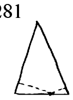
322. Внутри правильного треугольника взята произвольная точка O, из которой опущены три перпендикуляра на стороны треугольника. Доказать, что сумма этих перпендикуляров не зависит от положения точки O внутри треугольника.

280



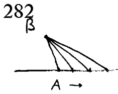
323. Из точки на основании равнобедренного треугольника опущены перпендикуляры на его боковые стороны. Доказать, что сумма длина этих перпендикуляров одинакова для всех точек основания.

281



324. Точка B неподвижна, а точка A движется по прямой с постоянной скоростью. Доказать, что за равные промежутки времени отрезок AB заметает равные площади.

282

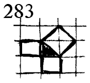


Теорема Пифагора

В этом разделе мы разными способами докажем знаменитую теорему Пифагора: квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов катетов.

325. Нарисовать на клетчатой бумаге равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом, равным стороне клетки, и проверить для него *теорему Пифагора*: площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах.

283

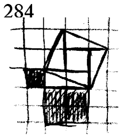


▷ Квадраты, построенные на катетах, имеют единичную площадь. Квадрат, построенный на гипотенузе, разбивается на четыре треугольника, каждый из которых составляет половину квадрата сетки, и потому имеет площадь 2 — как и требуется. ◁

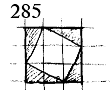
326. Проверить теорему Пифагора для прямоугольного треугольника с катетами 1 и 2.

▷ Квадраты, построенные на катетах, имеют площадь 1 и 4. Остаётся найти площадь квадрата, построенного на гипотенузе. Это можно сделать двумя способами. Во-первых, его можно разрезать на 4 треугольника и центральный квадрат. Треугольники равны исходному (катеты 1 и 2) и имеют площадь 1. Площадь четырёх таких треугольников равна 4, да ещё единичный квадрат в центре, всего получается 5, как и требовалось.

284



285

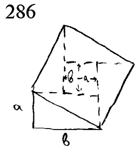


Другой способ вычислить площадь квадрата, построенного на гипотенузе, состоит в том, чтобы обложить его с четырёх сторон треугольниками, дополнив до большого квадрата. Добавив четыре треугольника, равных исходному, мы получим квадрат $3 \times 3 = 9$, таким образом, искомая площадь равна $9 - 4 = 5$. ◁

327. Доказать теорему Пифагора в общем случае, разрезав построенный на гипотенузе квадрат на четыре треугольника и внутренний квадрат.

▷ Пусть катеты исходного треугольника равны a и b (считаем, что $a < b$) и на его гипотенузе построен квадрат. Разрежем этот квадрат как на рисунке. Более подробно, построим на каждой стороне квадрата прямоугольный треугольник, равный исходному. Поскольку сумма острых углов прямоугольного треугольника равна $90°$, эти треугольники уложатся без щелей. Останется квадрат: в самом деле, каждая из сторон оставшейся части равна $b - a$, а все углы прямые. Таким образом, кварат разреза на четыре треугольника (площадь каждого $ab/2$, всего $2ab$) и квадрат со стороной $b - a$ и площадью $(b - a)^2$, В сумме имеем

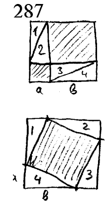
286



$$2ab + (b - a)^2 = 2ab + b^2 + a^2 - 2ab = a^2 + b^2,$$

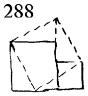
как и говорит теорема Пифагора. ◁

287



Вместо разрезания квадрата на части можно было бы дополнить его до большего квадрата. Это доказательство можно сделать совсем наглядным. Рассмотрим два способа разрезать квадрат со стороной $a+b$ на части (см. рисунок). В первом случае получаются квадрат $a\times a$, квадрат $b\times b$ и четыре прямоугольных треугольника с катетами a и b. Во втором случае получаются те же четыре треугольника и один большой квадрат, сторона которого равна гипоттенузе прямоугольного треугольника с катетами a и b. Поэтому суммарная площадь двух квадратов со сторонами a и b равна площади большого квадрата.

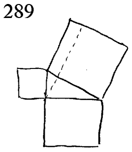
288



328. Используя рисунок, объяснить, как можно любые два квадрата разрезать на пять частей и сложить из них один квадрат.

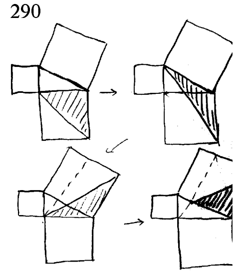
▷ Пусть стороны квадратов равны a и b, причём $a<b$. Приложим квадраты друг к другу как на рисунке (больший слева) и отложим на нижней стороне большего квадрата отрезок, равный a. Соединим эту точку с левым верхним и правым верхним углами картинки и сделаем разрезы по этим линиям. Получатся два прямоугольных треугольника со сторонами a и b (один цельный, другой составлен из двух частей). Пристроим их сверху как на рисунке — получится квадрат. ◁

289



329. На сторонах прямоугольного треугольника построены квадраты. Высота, опущенная из прямого угла, продолжена и разрезает построенный на диагонали квадрат на два прямоугольника. Доказать, что они равновелики квадратам, построенным на катетах.

290



▷ Решение этой задачи проще всего пояснить последовательностью картинок. Чтобы доказать, что квадрат и прямоугольник равновелики, мы разделим каждый из них на два равных треугольника и покажем, что эти треугольники могут быть преобразованы друг в друга с сохранением площади. На первом шаге мы сдвигаем вершину треугольника параллельно основанию, отчего его площадь не меняется. Далее мы поворачиваем треугольник на 90° (треугольники равны по двум сторонам и углу между ними). Далее мы еще раз сдвигаем вершину (уже другую) параллельно основанию. ◁

Подобие

330. Говоря неформально, подобные объекты — это объекты одинаковой формы, но (возможно) разных размеров. Привести несколько примеров подобных объектов из «реальной жизни».

▷ Фотографии разного размера, отпечатанные с одного и того же негатива. Настоящий автомобиль и его модель (если она выполнена точно в масштабе). Все круги подобны. Все квадраты подобны. Все равносторонние треугольники подобны. ◁

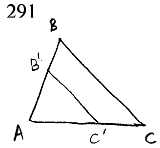
Иногда кажущиеся подобными объекты на самом деле не подобны. Например, фотографии одного и того жн здания, сделанные с разных расстояний, не совсем подобны (при подходе к зданию видимые пропорции немного меняются).

> Два треугольника *подобны*, если их соответственные углы равны, и стороны одного в одно и то же число раз больше (или меньше) соответственных сторон другого. Это число называется *коэффициентом подобия*.
>
> Обозначение: $ABC \sim A'B'C'$ означает, что треугольники ABC и $A'B'C'$ (соответственные вершины обозначены обозначены одинаковыми буквами) подобны.

331. Доказать, что первого условия уже достаточно: если углы одного треугольника равны углам другого, то стороны пропорциональны (отличаются в одно и то же число раз)

▷ Пусть ABC — больший треугольник, а $A'B'C'$ — меньший. Наложим меньший на больший так, чтобы вершины A и A' совместились, $A'B'$ пошло по AB и $A'C'$

291



пошло по AC (это возможно, так как углы Aи A' равны). Тогда сторона $B'C'$ будет параллельной BC (поскольку углы B' и B равны). По теореме Фалеса (лучи света направлены вдоль BC) отрезок AB во столько же раз больше отрезка $A'B'$, во сколько его тень AC больше $A'C'$. Таким образом, из трёх отношений сторон

$$AB : A'B', \quad AC : A'C, \quad BC : B'C'$$

два первых равны. Но то же самое рассуждение можно провести и для другой вершины, и получится, что другие два отношения равны, Значит, равны все три. ◁

332. Доказать обратное: если все стороны одного треугольника в одно и то же число раз больше соответственных сторон второго треугольника, то соответственные углы треугольников равны.

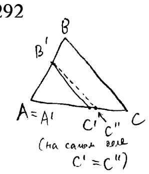
▷ Пусть все стороны треугольника ABC в одно и то же число раз больше сторон треугольника $A'B'C'$. Применим такой трюк: построим треугольник $A''B''C''$, у которого все углы равны соответствующим углам треугольника ABC, а сторона $A''B''$ равна стороне $A'B'$. (Его можно построить по стороне и двум углам, третий угол автоматически получится правильным, так как сумма углов равна $180°$.)

Теперь смотрите: по прошлой задаче треугольник $A''B''C''$ подобен ABC. В частности, все его стороны меньше сторон треугольника ABC в одно и то же число раз. Это же верно и для треугольника $A'B'C'$ — его стороны также меньше сторон треугольника ABC в одно и то же число раз. И это число будет одинаковым для обоих треугольников, так как $A'B' = A''B''$. Значит, треугольники $A'B'C'$ и $A''B''C''$ равны по трём сторонам, и углы у них тоже равны. Осталось вспомнить, что углы треугольника $A''B''C''$ были равны углам треугольника ABC. ◁

333. В треугольниках ABC и $A'B'C'$ углы A и A' равны. Кроме того, отношения сторон $A'B' : AB$ и $A'C' : AC$ равны. Доказать, что треугольники подобны.

▷ Наложим меньший треугольник (пусть это будет $A'B'C'$) на больший так, чтобы вершины A и A' совместились, $A'B'$ пошло по AB и $A'C'$ пошло по AC (это возможно, так как углы A и A' равны). Если мы докажем, что $B'C'$ стало параллельным BC, то всё будет сделано (можно воспользоваться уже решённой задачей: все три пары соответственных углов равны). Чтобы доказать это, сделаем так: проведём отрезок $B'C''$, параллельный BC, и докажем, что C'' совпадёт с C'. В самом деле, треугольники $AB'C''$ и ABC подобны, значит, отношения $A'C'' : AC$ и $A'B' : AB$ равны и равны отношению $A'C' : AC$ по условию. Значит, $A'C''$ и $A'C'$ составляют одну и ту же долю AC и потому точки C' и C'' совпадают. ◁

292



Три предыдущие задачи называют тремя признаками подобия: по трём углам, по трём сторонам и по двум сторонам и углу.

334. Какой из признаков нужно применить, чтобы доказать, что любые два равносторонних треугольника подобны?

▷ Годится любой из трёх: все углы равны 60°, отношения сторон равны (поскольку в каждом из треугольников все стороны равны). ◁

При решении задач очень важно увидеть на чертеже подобные треугольники.

335. В трапеции проведены диагонали. Какие треугольники подобны?

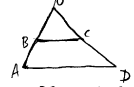
▷ Отмеченные на рисунке углы равны, поэтому выделенные треугольники подобны. ◁

293

336. Боковые стороны трапеции продолжены до пересечения. Какие треугольники подобны?

▷ Треугольники, образуемые боковыми сторонами трапеции с её основаниями, подобны (по трём углам). ◁

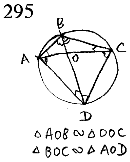
294



337. Во вписанном четырёхугольнике проведены диагонали. Найдите две пары подобных треугольников.

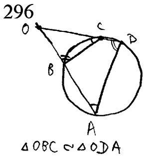
▷ Диагонали делят четырёхугольник на четыре треугольника. Отмеченные углы равны как вписанные, опирающиеся на одну и ту же дугу, поэтому противоположные треугольники подобны. Аналогично для другой пары треугольников. ◁

295



По сравнению с задачей о трапеции есть два отличия: во-первых, тут две пары подобных треугольников, во-вторых, соответственными являются другие пары сторон и углов.

296



338. Противоположные стороны вписанного четырёхугольника продолжены до пересечения. Найдите подобные треугольники.

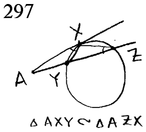
▷ Противоположные углы вписанного четырёхугольника составляют в сумме 180°, поэтому отмеченные на рисунке углы равны. Значит, треугольники, в которые эти углы входят, подобны.

(Если продолжить другую пару противоположных сторон до пересечения, получится ещё пара подобных треугольников.) ◁

339. Из точки A, лежащей вне окружности, проведена касательная AX, причём X — точка касания, а также секущая, пересекающая окружность в точках Y и Z; точки X, Y и X соединены отрезками. Найти подобные треугольники.

▷ Оба угла AXY и XZA равны половине дуги XY, к тому же угол A в треугольниках AXY и AXZ общий, значит они подобны. ◁

297



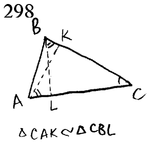
Последняя задача может рассматриваться как предельный случай предпоследней: когда одна сторона вписанного четырёхугольника стремится к нулю, секущая превращается в касательную.

Для подобия прямоугольных треугольников достаточно равенство одной пары острых углов (поскольку прямые углы заведомо равны)

340. В остроугольном треугольнике из двух вершин опущены высоты на противоположные стороны. Найдите два подобных треугольника.

▷ Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AK и BL. Тогда получается два прямоугольных треугольника AKC и BLC, содержащих угол C. Поэтому они подобны. ◁

298

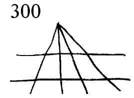


341. В прямоугольном треугольнике из вершины прямого угла опущена высота на гипотенузу. Найдите три подобных треугольника.

▷ На рисунке легко увидеть три прямоугольных треугольника: исходный треугольник и две части, на которые его делит высота. Каждая из частей имеет общий угол с исходным треугольником и потому ему подобна. ◁

299

300



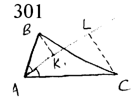
342. Несколько лучей, выходящих из одной точки, пересекают две параллельные прямые. Найдите несколько пар подобных треугольников.

▷ Треугольники, ограниченные двумя соседними лучами и параллельными прямыми, имеют равные углы и потому подобны. ◁

343. В треугольнике ABC из вершин B и C опущены высоты на биссектрису угла A. Найдите два подобных треугольника.

▷ Пусть BK и CL — эти высоты. В прямоугольных треугольниках ABK и ACL острые углы при вершине A равны (свойство биссектрисы), поэтому они подобны. ◁

301

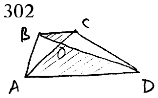


В следующих задачах мы пользуемся подобием обнаруженных нами треугольников.

344. Доказать, что в трапеции точка пересечения диагоналей делит обе диагонали в одном и том же отношении, равном отношению оснований трапеции.

▷ Пусть диагонали AC и BD трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC пересекаются в точке O (см. рисунок). Тогда треугольники AOD и BOC, как мы видели, подобны. По свойству подобных треугольников

302



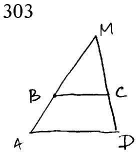
$$AO : OC = BO : OD = AB : CD,$$

что и требовалось доказать. ◁

345. Известны длины боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$, а также длины её оснований AD и BC, причём $AD > BC$. Продолжения боковых сторон пересекаются в точке M. Найти расстояния от точки M до вершин трапеции.

▷ Как мы видели, треугольники AMD и BMC подобны. Их коэффициент подобия $k = AD/BC$ нам известен. Отрезок AM больше отрезка BM в k раз. Остаётся выполнить вычисления:

303



$$AM = k \cdot BM, \quad AB = AM - BM = (k-1)BM,$$

$$BM = AB/(k-1), \quad AM = AB \cdot k/(k-1)$$

Подставляя выражение для k и делая аналогичные выкладки для второй боковой стороны, получаем

$$BM = \frac{AB \cdot BC}{AD - BC}, \quad AM = \frac{AB \cdot AD}{AD - BC},$$

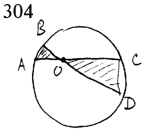
$$CM = \frac{CD \cdot BC}{AD - BC}, \quad DM = \frac{CD \cdot AD}{AD - BC},$$

◁

346. Дана точка, лежащая внутри окружности. Через неё проводят хорду, которая делится этой точкой на два отрезка, и вычисляют произведение длин этих отрезков. Доказать, что это произведение не зависит от того, как провести хорду.

▷ Надо провести хорду двумя способами и показать, что произведение отрезков будет одинаковым. Другими словами, надо доказать, что если хорды AC и BD пересекаются в точке O, то $AO \cdot OC = BO \cdot OD$.

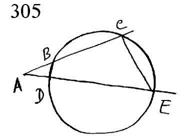
304



Соединив концы хорд, получим вписанный четырёхугольник, который делится диагоналями на две пары подобных треугольников. В частности, треугольники ABO и DCO подобны, и потому $AO : OD = BO : OC$. Умножая это равенство на $OC \cdot OD$, получаем искомое утверждение. ◁

347. Дана точка A лежащая вне окружности. Через неё проводят луч, пересекающий окружность в точках B и C. Доказать, что произведение $AB \cdot AC$ не зависит от того, какой луч провести.

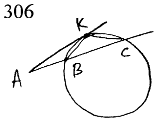
305



▷ Пусть из точки A проведён ещё один луч, пересекающий окружность в точках D и E. Надо доказать, что $AB \cdot AC = AD \cdot AE$. Соединив вершины четырёхугольника BCED, увидим знакомую картину: противоположные стороны вписанного четырёхугольника продолжены до пересечения. В этом случае треугольники ABD и AEC подобны, поэтому $AB : AE = AD : AC$. Умножая это равенство на $AE \cdot AC$, получаем искомое утверждение. ◁

348. Доказать, что произведение в предыдущей задаче равно квадрату длины касательной, проведённой к окружности из точки A.

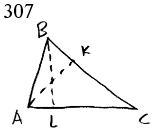
306



▷ Пусть из точки A выходит луч. пересекающий окружность в точках B и C, а также касательная AK. Как мы видели, треугольники ABK и AKC подобны, поэтому $AK : AC = AB : AK$. Умножая на $AK \cdot AC$, получаем, что $AK^2 = AB \cdot AC$, что и требовалось. ◁

349. Доказать, что в произвеольном треугольнике высоты обратно пропорциональны сторонам, на которые они опущены.

307

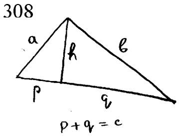


▷ Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AK и BL. Прямоугольные треугольники AKC и BLC, содержащих угол C. Поэтому они подобны, и отношение высот $AK : BL$ равно отношению сторон $AC : BC$ (в обратном порядке). Другими словами, если одна сторона в k раз больше другой, то опущенная на неё высота в k раз меньше, что и требовалось доказать. ◁

Эта задача уже встречалась нам, когда мы говорили о площадях: удвоенная площадь треугольника равна произведению стороны на высоту, и можно взять любую сторону, поэтому есть одна сторона больше другой, то опущенная на неё высота во столько же раз меньше.

350. Высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, делит его гипотенузу на два отрезка. Доказать, что она равна среднему геометрическому этих отрезков, что каждый катет равен среднему геометрическому всей гипотенузы и отрезка, к нему прилегающему, и что отношение этих отрезков равно квадрату отношения катетов.

308



▷ Пусть катеты треугольника равны a и b, гипотенуза равна и делится высотой h на отрезки p и q. Из подобия двух частей треугольника получаем, что $p : h = h : q$, то есть $pq = h^2$ и $h = \sqrt{pq}$.

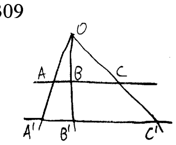
Части подобны целому треугольнику, поэтому $p : a = a : c$ и $pq = a^2$, откуда $a = \sqrt{pc}$. Аналогично $b = \sqrt{qc}$.

Наконец, $p : q = (p/h) \cdot (h/q) = (a/b) \cdot (a/b) = (a/b)^2$. ◁

351. Вывести из предыдущей задачи, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

▷ Используя те же обозначения, что и в решении предыдущей задачи, можно записать $pc = a^2$, $qc = b^2$. Если сложить эти равенства, получим, что $(p+q)c = a^2+b^2$. Остаётся заметить, что два отрезка p и q в сумме дают c. ◁

309

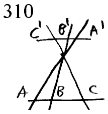


352. Три прямые проходят через одну точку O и пересекают две параллельные прямые: одну в точках A, B, C, другую в точках A', B' и C'. Доказать, что $AB : BC = A'B' : B'C'$

▷ Эту теорему можно сформулировать так: если точечный источник света O освещает две параллельные прямые, то отрезки на одной прямой относятся так же, как их тени на другой прямой.

Пусть A, B и C — точки на одной из прямых, а A', B' и C' — их тени (см. рисунок). Треугольник $OA'B'$ подобен треугольнику OAB, и коэффициент подобия может быть записан как OA'/OA, OB'/OB или как $A'B'/AB$. Треугольники $OB'C'$ и OBC также подобны, и коэффициент подобия может быть записан как OB'/OB, OC'/OC или $B'C'/BC$. Значит, коэффициенты подобия равны (в обоих случаях они равны OB'/OB); обозначим этот общий коэффициент подобия через k. Тогда $A'B' = k \cdot AB$, $B'C' = k \cdot BC$, и потому $A'B' : B'C' = AB : BC$, что и требовалось доказать.

310



Это доказательство применимо и к случаю, когда параллельные прямые находятся по разные стороны от точки O, хотя о тенях в таком случае говорить не приходится. ◁

353. Доказать, что боковые стороны трапеции и прямая, соединяющая середины её оснований, пересекаются в одной точке.

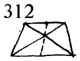
▷ Возьмём точку пересечения боковых сторон и проведём прямую через эту точку и середину верхнего основания. Предыдущая задача показывает, что эта прямая разделит нижнее основание также на две равные части. ◁

311

354. Доказать, что диагонали трапеции и прямая, соединяющая середины её оснований, пересекаются в одной точке.

▷ Здесь доказательство аналогично: проведём через точку пересечения диагоналей и середину одного из оснований прямую. Она разделит другое основание в том же отношении, что и первое, то есть пополам. ◁

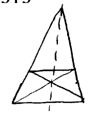
312



355. Дана трапеция. Как найти середины её оснований с помощью одной линейки?

▷ Мы уже знаем, что четыре точки (середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон) лежат на одной прямой.

313



Но две последние точки можно найти с помощью линейки, поэтому эту прямую можно построить. Точки, в которых она пересечёт основания, будут их серединами. ◁

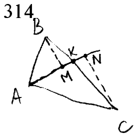
356. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Как найти его середину с помощью одной линейки?

▷ Если взять произвольные две точки на другой прямой, получится трапеция, и мы свели задачу к предыдущей. ◁

357. Биссектриса угла треугольника делит противолежающую сторону на два отрезка. Доказать, что отношение этих отрезков равно отношению прилегающих к ним сторон треугольника.

▷ Пусть AK — биссектриса в треугольнике ABC. Опустим на неё перпендикуляры BM и CN из точек B и C. Треугольники ABM и ACN, как мы видели, подобны, поэтому $BM : CN = AB : AC$. С другой стороны, треугольники KNC и KMB тоже подобны, поэтому $BM : CN = BK : KC$. Соединяя эти равенства, получаем, что $AB : BC = BK : KC$, что и требовалось. ◁

314



Ещё несколько задач

358. В равнобедренном треугольнике с углами 36°, 72° и 72° проведена биссектриса угла в 72^{c}irc, делящая противопложную сторону на два отрезка. Доказать, что больший отрезок относится к меньшему так же, как вся сторона относится к большему отрезку.

Утверждение предыдущей задачи формулируют так: биссектриса такого треугольника делит противоположную сторону в отношении «золотого сечения». Такое название объясняется тем, что это отношение считали приятным для глаза; его использовали многие художники.

359. Доказать, что отношение боковой стороны равнобедренного треугольника с углами $36°$, $72°$ и $72°$ к основанию составляет $(\sqrt{5}+1)/2$.

360. Два треугольника подобны с коэффициентом k. Доказать, что медианы, биссектрисы и высоты первого треугольника в k раз отличаются от соответствующих медиан, высот и биссектрис второго треугольника. Доказать, что площадь первого треугольника в k^2 раз отличается от площади второго треугольника.

361. Даны две параллельные прямые и точка, на них не лежащая. Как провести через неё прямую, параллельную данным, с помощью одной линейки?

362. Даны две параллельные прямые и отрезок на одной из них. Как удвоить его (построить отрезок вдвое большей длины), пользуясь одной линейкой?